

СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

Н. Н. Баутин

•

П О В Е Д Е Н И Е
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ВБЛИЗИ ГРАНИЦ
ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

ОГИЗ
ГОСТЕХИЗДАТ

1 9 4 9

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
проф. А. И. ЛУРЬЕ
и проф. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1949 МОСКВА

Н. Н. БАУТИН

**ПОВЕДЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ВБЛИЗИ ГРАНИЦ
ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ**

*С предисловием
акад. А. А. АНДРОНОВА*

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1949 МОСКВА

Содержание

1. Введение

2. Глава I

3. Глава II

4. Глава III

5. Глава IV

6. Глава V

7. Глава VI

8. Глава VII

9. Глава VIII

10. Глава IX

11. Глава X

12. Глава XI

13. Глава XII

14. Глава XIII

15. Глава XIV

16. Глава XV

17. Глава XVI

18. Глава XVII

19. Глава XVIII

20. Глава XIX

21. Глава XX

22. Глава XXI

23. Глава XXII

24. Глава XXIII

25. Глава XXIV

26. Глава XXV

27. Глава XXVI

28. Глава XXVII

29. Глава XXVIII

30. Глава XXIX

31. Глава XXX

Редактор *Б. Л. Минцберг*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 30/XII 1948 г. Тираж 3000 экз. Печ. л. 10,25 Уч.-изд. л. 9,13
Тип. зн. в печ. л. 35624 М-19543 Цена 5 р. 50 к. Заказ № 4123

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» «ОГИЗа
при Совете Министров СССР, Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
Глава I. Поведение траекторий в окрестности состояния равновесия вблизи границ, определяемых условиями Раута — Гурвица	18
Глава II. Система двух уравнений первого порядка	25
§ 1. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы	25
§ 2. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы	30
§ 3. Выражение для $I_2(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы	37
§ 4. Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при переходе через границу области устойчивости	38
§ 5. Примеры	50
1. Симметричный полет самолета в вертикальной плоскости с постоянным углом атаки (50)	
Глава III. Система трех уравнений первого порядка	56
§ 1. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты системы, приведенной к каноническому виду	57
§ 2. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы (без приведения к каноническому виду)	63
§ 3. Выражение для $I(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы	71
§ 4. Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при переходе через границу области Раута — Гурвица	73

§ 5. Примеры	80
1. Сложный генератор с вырожденным вторым контуром (80).	
2. Стабилизация курса самолета автопилотом (83). 3. Регулирование уровня жидкости (89). 4. Следящая система (95).	
5. Регулирование числа оборотов регулятором прямого действия (100). 6. Генератор с учетом сеточного тока (106).	
Глава IV. Система четырех уравнений первого порядка	110
§ 1. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты системы, приведенной к каноническому виду	114
1°. Случай, когда вторая пара корней комплексная (114). 2°. Случай, когда вторая пара корней действительная (123).	
§ 2. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы (без приведения к каноническому виду)	127
§ 3. Выражение для $l(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы	138
§ 4. Примеры	140
1. Однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией (140).	
2. Непрямое регулирование при наличии жесткой обратной связи (144). 3. Судно с гироскопическим стабилизатором (149).	
4. Система с неконсервативными силами, зависящими от положения (152). 5. Сложный генератор (155).	
Глава V. Некоторые замечания к общему случаю системы n уравнений первого порядка	160
Литература	163

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование устойчивости линеаризованных систем при помощи критериев Раута — Гурвица и Найквиста, обоснованное — для достаточно малых отклонений — теоремами А. М. Ляпунова, в настоящее время хорошо известно инженерам и физикам, занимающимся усилительными схемами, автоматическим регулированием, гироскопической стабилизацией, следящими системами и т. д. Эти критерии позволяют разбить пространство параметров системы на области, соответствующие устойчивости, рассматриваемых равновесных режимов, и на области, соответствующие их неустойчивости. Однако для многих практических вопросов представляет интерес поведение системы в окрестности данного состояния равновесия *при тех значениях параметров, которые соответствуют точкам пространства параметров, лежащим в непосредственной близости к границам, разбивающим это пространство* (по отношению к данному состоянию равновесия) *на устойчивые и неустойчивые области.*

Для решения этого вопроса недостаточно рассмотрения линейной задачи, сводящейся к исследованию характеристического уравнения, а, как показано в предлагаемой вниманию читателей книге, вопрос сводится к изучению некоторой другой, уже нелинейной задачи, и — для практически наиболее важных случаев — в конечном счете к отысканию так называемых „ляпуновских величин“. Автор находит формулы для непосредственного вычисления этих ляпуновских величин и детально разъясняет технику разбиения границ области устойчивости на „*безопасные границы*“, достаточно малые нарушения которых приводят лишь к возникновению автоколебаний малой амплитуды (сколь угодно малой при достаточно малых нарушениях), и на „*опасные границы*“, малейшее нарушение которых приво-

дит к неконтролируемому (путем выбора достаточно малого нарушения) нарастанию отклонений режима от равновесного. Книга снабжена значительным количеством примеров, иллюстрирующих как излагаемую общую теорию, так и технику производства выкладок. Многочисленные рисунки и диаграммы делают выводы теории и результаты исследования конкретных задач наглядными и доступными значительному кругу инженеров и физиков.

Я рекомендую эту небольшую книгу инженерам и физикам, занимающимся вопросами устойчивости. С моей точки зрения, она представляет значительный шаг вперед в трудном и важном вопросе исследования устойчивости при учете нелинейности системы. В частности, книга Н. Н. Баутина, рассматривая вопрос об устойчивости по Ляпунову с точки зрения теории бифуркаций (т. е. считая параметры, входящие в правые части исследуемых дифференциальных уравнений, переменными и рассматривая ряды их фиксированных значений), убедительно иллюстрирует не только большую теоретическую значимость теории устойчивости, принадлежащей А. М. Ляпунову, и практический интерес тех ее выводов, которые относятся к обычным („грубым“) системам (что хорошо известно), но и показывает интерес для технических вопросов тех менее известных исследований А. М. Ляпунова, которые посвящены так называемым особым случаям общей задачи об устойчивости движения.

А. А. Андронов

г. Горький
1948 г.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос об устойчивости состояний равновесия * динамических систем ** возникает при решении многих прикладных задач в области теории автоматического регулирования, гироскопической стабилизации, радиотехники, электротехники и т. д. При этом обычно предполагается, что в технических прикладных задачах в противоположность консервативным задачам механики мы имеем дело с *грубыми* *** состояниями равновесия и что, следовательно, при анализе устойчивости можно ограничиться тем случаем, когда этот вопрос может быть решен путем отбрасывания всех нелинейных членов и

* Состояния равновесия понимаются здесь в обобщенном смысле. Например, режимы, связанные с наличием постоянной угловой скорости, постоянного тока и т. д., рассматриваются как равновесные режимы или как состояния равновесия. При этом предполагается, что поведение соответствующей динамической системы в окрестности состояния равновесия описывается, после выбора надлежащей системы координат, дифференциальными уравнениями, правые части которых не содержат явно времени. Заметим, что такие состояния равновесия часто называют, следуя Рауту [2] и Ляпунову [1], „установившимися движениями“.

** Под динамической системой мы будем понимать механическую, электрическую, тепловую и т. п. систему, движения которой с достаточной точностью отображаются системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

*** Для систем с двумерным фазовым пространством, т. е. для систем, описываемых двумя уравнениями первого порядка вида $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, понятия *грубой системы* и *системы первой степени негрубости* определены в работах А. Андронова и Л. Пойтрянгина [3], А. Андронова и Е. Леонтович [4] и А. Андронова и С. Хайкина [5]. Требование грубости состояния равновесия эквивалентно требованию необращения в нуль действительных частей корней характеристического уравнения. Понятие *грубости состояния равновесия* легко переносится на системы с любым конечным числом степеней свободы.

исследованием корней характеристического уравнения для полученных в результате такого отбрасывания так называемых *уравнений первого приближения*.

Вопрос о точном смысле понятия устойчивости имеет свою историю. Понятием устойчивости движения пользовались Лаплас [6] и Лагранж [11], Максвелл [7], Томсон и Тэт [8], Пуанкаре [9] и другие, не давая этому понятию точного определения. Впервые точное математическое определение устойчивости движения было дано А. М. Ляпуновым в 1892 году. Согласно Ляпунову, задача выяснения устойчивости данного движения состоит в том, чтобы узнать, „можно ли начальные значения функций x_s (характеризующих отклонение координат движения от нулевых значений, отвечающих движению, устойчивость которого исследуется), не делая их нулями; выбирать настолько численно малыми, чтобы во все время движения, следующее за начальным моментом, функции эти оставались численно меньшими некоторых заранее данных, отличных от нуля, но сколь угодно малых пределов“ *.

В настоящей монографии под термином „устойчивость движения“ или, что будет здесь достаточно, „устойчивость установившегося движения“, понимается устойчивость по Ляпунову, хотя это понятие устойчивости в ряде пунктов и не отвечает тем требованиям, которые естественным образом выдвигаются в приложениях **. Дело в том, что всякие другие понятия устойчивости (устойчивость „в большом“ и т. д.), более соответствующие реальным условиям, интересующим конструкторов физических и технических приборов, требуют для своего применения таких расчетов, которые при современном состоянии теории дифференциальных уравнений могут быть успешно проведены лишь в немногих случаях.

Прием исследования вопросов устойчивости исходных нелинейных уравнений путем замены последних линейными

* Ляпунов [1], стр. 5.

** В реальных системах случайные отклонения координат и скоростей не могут быть сделаны по нашему требованию достаточно малыми, и равновесие или движение, устойчивое по Ляпунову, может быть в действительности неустойчивым. По существу, теоретическое исследование устойчивости состояния равновесия требует знания области устойчивости „в большом“ и знания характера возможных случайных воздействий.

уравнениями первого приближения также имеет свою историю. Этот прием опять ведет свое начало от Даламбера [10], Лагранжа [11], Максвелла, Томсона и Тэта, Вышнеградского [12], Раута [2], Жуковского [13], Стодола [14] и др. Однако эти авторы не дали обоснования законности такой замены одной задачи другой, с которой, само собой разумеется, рассматриваемая задача может и не находиться ни в какой зависимости. Этот прием позволил получить в ряде прикладных вопросов, например в теории регулирования, ряд весьма существенных выводов, которые были подтверждены экспериментом и практикой. Математическое обоснование этого приема было также дано только Ляпуновым в 1892 году применительно к введенному им понятию об устойчивости движения.

Для установившихся движений теоремы Ляпунова гласят, что если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения отрицательны, то состояние равновесия будет *устойчивым в смысле Ляпунова* (притом асимптотически) независимо от наличия в правых частях нелинейных уравнений членов порядка выше первого, а если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то состояние равновесия будет *неустойчивым в смысле Ляпунова*, также независимо от членов старших порядков. Если, наконец, среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с действительной частью, равной нулю (нулевой или чисто мнимый корень), то уравнения первого приближения не могут дать ответ на вопрос об устойчивости по Ляпунову состояния равновесия.*

Анализ корней характеристического уравнения приводит к хорошо известным условиям Раута — Гурвица [2, 16], которые выделяют нам те области значений параметров системы, которые соответствуют устойчивости рассматриваемого состояния равновесия. Так как условия Раута — Гурвица, в особенности для систем с многими степенями свободы, приводят к очень громоздким неравенствам, то часто на практике вместо детерминантных условий Раута — Гурвица пользуются так называемым критерием Найквиста **, который

* Ляпунов [1], стр. 95. См. также Четаев [15], стр. 113.

** См. Найквист [17]. Обобщение критерия Найквиста, см. Неймарк [18, 19].

позволяет (иногда сравнительно простым образом) решить вопрос об устойчивости или неустойчивости состояний равновесия, а также вопрос о том, в каком направлении влияют на эту устойчивость изменения интересующих нас параметров. Однако, само собой разумеется, границы областей устойчивости в пространстве параметров * получаются одними и теми же, пользуемся ли мы для определения этих границ условиями Раута — Гурвица или кривыми Найквиста.

Хотя основной интерес для прикладных вопросов имеют как раз такие системы, корни характеристических уравнений которых имеют отрицательные действительные части, т. е. системы со значениями параметров, соответствующих точкам, лежащими *внутри* области Раута — Гурвица **, тем не менее для некоторых прикладных вопросов представляет интерес выяснение поведения системы, если точка, изображающая ее в пространстве параметров, лежит на границе области, выделяемой условиями Раута — Гурвица, или, что физически эквивалентно, достаточно близко к этой границе. Дело в том, что в прикладных вопросах при выборе значений параметров приходится считаться не только с требованиями устойчивости, но и с другими требованиями, относящимися к работе устройства, и может оказаться, что одновременное удовлетворение этих требований наилучшим образом достигается выбором параметров, соответствующих точкам, лежащим в сравнительной близости к границам области, дозволенной условиями Раута — Гурвица. Таким образом возникает вопрос о поведении динамической системы вблизи границ, определяемых условиями Раута — Гурвица и при малых нарушениях этих условий. Действительно, выбирая значения параметров, близкие к границе, мы никогда не можем быть уверены, что случайные отклонения этих параметров в реальной системе не выведут точку, представляющую систему в пространстве

* Пространством параметров динамической системы называют пространство, по декартовым осям которого откладываются интересующие нас параметры, входящие в уравнения движения системы.

** Областью Раута — Гурвица, относящейся к данному состоянию равновесия, будем называть совокупность значений параметров системы, для которых все корни характеристического уравнения соответствующей линейной системы имеют отрицательную действительную часть.

параметров, за границу области Раута — Гурвица. С другой стороны, поведение динамической системы при малых нарушениях условий устойчивости Раута — Гурвица определяет и особенности поведения систем, для которых условия Раута — Гурвица выполняются, но для которых точки, представляющие систему в пространстве параметров, лежат в достаточной близости к границам области устойчивости.

Вопрос о поведении системы, если точка, изображающая ее в пространстве параметров, переходит через границу области Раута — Гурвица, возникает также в теории генерации автоколебаний. Ответ на этот вопрос позволяет установить, будет ли самовозбуждение „мягким“ или изображающая точка уйдет от состояния равновесия и будет иметь место либо „жесткое“ самовозбуждение, либо переход к новому состоянию равновесия.

С этой задачей о поведении системы вблизи границ области устойчивости тесно связаны исследования Ляпунова, относящиеся к тому случаю, когда среди корней характеристического уравнения есть корни с равной нулю действительной частью.

Именно Ляпуновым были развиты специальные методы исследования, сводившие задачу к определению знаков или к необращению в нуль некоторых постоянных величин, для вычисления которых Ляпунов дал определенные рецепты и которые получили впоследствии название *ляпуновских величин*, или *ляпуновских коэффициентов*.

В настоящей монографии рассматривается поведение динамических систем в предположении, что, во-первых, отклонения параметров от их граничных значений достаточно малы * и что, во-вторых, для точек пространства параметров, соответствующих самой границе **, рассматриваемое негрубое со-

* Это предположение, конечно, значительно ограничивает прикладную ценность приводимой ниже классификации границ Раута — Гурвица на „опасные“ и „безопасные“, так как, конечно, мы не всегда можем распрямляться малостью случайных изменений параметров.

Однако нужно заметить, что возражения такого же характера можно сделать, вообще, по отношению к реальной физической значимости понятия устойчивости по Ляпунову, о чем у нас уже была речь.

** В дальнейшем под словом „граница“ подразумевается граница области Раута — Гурвица.

стояние равновесия является простейшим из возможных негрубых состояний равновесия, т. е. является состоянием равновесия, для которого *первый* ляпуновский коэффициент, характеризующий устойчивость, не равен нулю. Иными словами, это значит, что мы рассматриваем только такие системы, для которых вопрос об устойчивости состояния равновесия решается исследованием нелинейных уравнений, полученных путем отбрасывания в правых частях исходных уравнений всех членов порядка выше третьего для точки границы области Раута — Гурвица, соответствующей двум чисто мнимым корням характеристического уравнения, и путем отбрасывания всех членов порядка выше второго для точки границы, соответствующей одному нулевому корню.

Оказывается, что при этих предположениях границы Раута — Гурвица могут быть двойкой природы.

„Безопасные границы“ — достаточно малое нарушение которых повлечет за собой лишь весьма малые (сколь угодно малые при достаточно малых нарушениях) изменения состояния системы.

Можно показать, что в этом случае координаты системы будут претерпевать лишь весьма малые периодические изменения, накладывающиеся на равновесное (теперь неустойчивое) положение системы.

„Опасные границы“ — сколь угодно малое нарушение которых повлечет за собой переход системы в новое состояние, которое мы не можем приблизить к исходному выбором достаточно малых нарушений границы.

Иначе говоря, может оказаться, что состояние равновесия измененной системы (сколь угодно мало измененной) будет *неустойчиво* с точки зрения уравнений первого приближения, но практически система будет вести себя как *устойчивая*, так как изображающая точка, взятая из некоторой окрестности состояния равновесия, будет для всех t , начиная с начального $t=t_0$, оставаться в малой окрестности состояния равновесия (сколь угодно малой при достаточно малых изменениях системы) и, наоборот, может оказаться, что измененная система, *устойчивая* по уравнениям первого приближения, практически будет *неустойчива*, так как изображающую точку, взятую вне малой окрестности состояния равновесия (сколь угодно малой при достаточно малых изме-

нениях системы); нельзя заставить оставаться вблизи состояния равновесия.

Эта классификация границ области Раута — Гурвица на „опасные“ и „безопасные“ помимо её интереса для тех прикладных вопросов, где рабочими режимами являются состояния равновесия, и вопросов, где мы интересуемся характером возникновения автоколебаний, представляет интерес еще и с другой точки зрения, а именно при исследовании качественной картины разбиения фазового пространства на траектории, в частности, для теории зависимости качественной структуры такого разбиения от параметра. Простейшие негрубые системы, с которыми здесь приходится иметь дело, как раз представляют основной интерес для теории бифуркаций, и знание поведения состояний равновесия при изменении параметров часто позволяет сделать некоторые заключения о качественной структуре разбиения фазового пространства на траектории.

Эти высказывания, несмотря на всю свою неполноту, все же имеют особый интерес в связи с тем, что они, в противоположность обычным методам исследования фазового пространства, не требуют никаких предположений о близости рассматриваемых движений к синусоидальным или консервативным (требований малости μ).

Сравнение результатов, даваемых теорией малого μ , с результатами, полученными путем анализа границ области Раута — Гурвица, позволяет в некоторых случаях установить пределы использования теории малого μ , если даже идет речь только о качественных высказываниях.

Таким образом, вопрос о характере границ („опасные“ или „безопасные“ границы) представляет прикладной интерес. Так как этот вопрос приходится решать для различных конкретных схем, то представляется крайне желательным найти простые вычислительные приемы для нахождения первой ляпуновской величины, характеризующей устойчивость систем, изображаемых в фазовом пространстве точками, находящимися на границе.

В настоящей монографии показано, что в рассматриваемом случае [для значений параметров вблизи тех границ области устойчивости, где первые ляпуновские величины $L(\lambda_0)$ и $f(\lambda_0)$ отличны от нуля] поведение траекторий в окрест-

ности состояния равновесия и, в частности, вопрос об „опасных“ и „безопасных“ границах сводится, в конечном счете, для границы, соответствующей нулевому корню, к самому факту обращения в нуль величины $L(\lambda_0)$, а для границы, соответствующей чисто мнимым корням, — к определению знака величины $L(\lambda_0)$.

В монографии эти ляпуновские величины получены в замкнутой форме. Соответствующие выражения даны в двух видах, один из которых основывается на предварительном приведении системы к каноническому виду и на дальнейшем непосредственном применении способа расчета, указанного Ляпуновым.

Другой способ, насколько известно автору, впервые примененный в настоящей работе, не требует предварительного приведения систем к каноническому виду и основывается на использовании некоторой вспомогательной консервативной системы.

Эти расчеты проведены для случаев $n=2$, $n=3$ и $n=4$.

Для $n>4$ общие формулы не приводятся, так как здесь появляются дополнительные трудности, связанные с решением линейной системы, и, кроме того, сами ляпуновские величины становятся весьма сложными.

Однако, если нелинейные члены не содержат членов второго порядка (этот случай часто возникает, когда характеристики устройств аппроксимируются нечетными функциями), то в предположении, что решена соответствующая линейная задача, все же можно дать простое выражение для ляпуновской величины, характеризующей устойчивость.

Рассуждения, связанные с поведением динамических систем при малых нарушениях условий Раута — Гурвица, по нашему мнению, раскрывают в технических задачах физический смысл исследований устойчивости состояний равновесия в тех особенных случаях, когда рассматриваемое состояние равновесия является негрубым и когда требуется учет членов высших порядков.

Таким образом, среди систем, представляющих интерес для техники, наряду с грубыми системами, где вопрос об устойчивости состояния равновесия решается условиями Раута — Гурвица, имеют существенное значение лишь системы,

где первая ляпуновская величина [т. е. $L(\lambda_0)$ или $I(\lambda_0)$], характеризующая устойчивость, не равна нулю.

Дальнейшие вырождения в технических задачах встречаются редко, и весьма часто исследование дальнейших вырождений не представляет никакого прикладного интереса, а связано с неправильной идеализацией задачи.

С другой стороны, первый ляпуновский коэффициент [$L(\lambda_0)$ или $I(\lambda_0)$], как уже было указано и как в особенности будет ясно из разобранных примеров, представляет, по нашему мнению, существенный интерес для приложений.

ГЛАВА I

ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ В ОКРЕСТНОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ УСЛОВИЯМИ РАУТА — ГУРВИЦА

Рассмотрим динамическую систему, определяемую n уравнениями первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.1)$$

где $X_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — аналитические функции всех рассматриваемых значений x_s .

Координаты состояния равновесия системы определяются из уравнений:

$$X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что начало координат перенесено в рассматриваемое состояние равновесия системы (1.1) и, следовательно:

$$X_j(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Пусть характеристическое уравнение * для рассматриваемого состояния равновесия имеет вид:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

* Говоря о „характеристическом уравнении“, мы, естественно, имеем в виду характеристическое уравнение соответствующей системы первого приближения.

Условия Раута—Гурвица выражаются в виде неравенств:

$$D_1 = p_1 > 0; \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} > 0; \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix} > 0 \dots;$$

$$D_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{vmatrix} > 0 \quad (p_j = 0, \text{ если } j > n)$$

Наряду с пространством параметров системы, о котором была речь выше, мы будем также рассматривать специальное пространство параметров, по декартовым осям которого откладываются значения коэффициентов (пространство коэффициентов p_j). Можно показать, что границами области устойчивости в этом пространстве служат только две поверхности: „плоскость“ $p_n = 0$, для точек которой характеристическое уравнение имеет равный нулю корень, и часть „поверхности“

$$R \equiv D_{n-1} = 0,$$

проходящая внутри области, выделяемой условиями $D_j > 0$ ($j = 1, \dots, n-2, n$), для точек которой характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней.

Исключим из рассмотрения те части границ $p_n = 0$ и $R = 0$, где характеристическое уравнение имеет более одного нулевого корня или более одной пары чисто мнимых корней, а также ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда *первый* ляпуновский коэффициент отличен от нуля. Как было сказано во введении, этим самым мы ограничиваемся рассмотрением простейших из возможных негрубых состояний равновесия.

Для дальнейшего рассмотрения удобно считать один из параметров переменным, могущим принимать те или другие фиксированные значения. Мы будем обозначать этот параметр через λ . Пусть при изменении λ коэффициенты p_j

меняются таким образом, что точка (p_j) описывает в пространстве коэффициентов кривую, пересекающую при бифуркационном значении $\lambda = \lambda_0$ границу области устойчивости.

В наших предположениях возможны два случая нарушения устойчивости состояния равновесия при изменении параметра λ :

а) $R \equiv D_{n-1}$ меняет знак, когда параметр λ проходит через бифуркационное значение $\lambda = \lambda_0$ (характеристическое уравнение, составленное для $p_j(\lambda)$, когда $\lambda = \lambda_0$ имеет одну пару чисто мнимых корней);

б) $r \equiv p_n$ меняет знак, когда параметр λ проходит через бифуркационное значение $\lambda = \lambda_0$ (характеристическое уравнение при $\lambda = \lambda_0$ имеет один равный нулю корень).

Поведение системы вблизи границы $R = 0$ или границы $r = 0$ при изменении параметра λ определяется нижеследующими предложениями. Эти предложения, сформулированные в виде трех теорем, представляют непосредственное следствие из теорем Ляпунова¹.

Будем рассматривать изменение параметра λ на некотором достаточно малом интервале $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$, где λ_0 определяется из условия $R(\lambda_0) = 0$, и пусть $L(\lambda_0)$ — первая ляпуновская величина, характеризующая утойчивость при $\lambda = \lambda_0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L(\lambda_0) < 0$, $\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0$ и пусть λ^* фиксированное значение параметра: $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (независящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, что для любой траектории $x_s(t)$, начальные значения которой удовлетворяют неравенству $|x_s(t)| < \varepsilon_0$, для всех t , начиная с некоторого $t > t_0$, будет выполняться неравенство $|x_s(t)| < \varepsilon_1$, если только $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$.

Таким образом, при возрастании параметра, состояние равновесия из устойчивого становится неустойчивым, однако изображающая точка остается в малой ε_1 -окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра, когда состояние равновесия опять становится устойчивым,

¹ Ляпунов [1], стр. 125 и 169.

изображающая точка снова возвращается к состоянию равновесия. Система ведет себя *обратно*.

Доказательство. Так как $L(\lambda_0) < 0$, то, как показал Ляпунов, состояние равновесия для $\lambda = \lambda_0$ будет устойчивым в том смысле, что траектории, попадающие в достаточно малую окрестность состояния равновесия, будут приближаться к нему асимптотически.

При $\lambda \leq \lambda_0$ существует система замкнутых поверхностей без контакта $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$, стягивающаяся к состоянию равновесия (эффективное построение такой системы поверхностей без контакта в малой окрестности состояния равновесия было осуществлено Ляпуновым)¹.

Выделим из системы поверхностей $V = h$ две поверхности $V = h_0$ и $V = h'_0$ ($V = h'_0$ — внутри $V = h_0$) таким образом, чтобы поверхность $|x_s| = \varepsilon_0$ лежала целиком между поверхностями $V = h_0$ и $V = h'_0$, и будем столь мало менять параметр λ , чтобы при $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$ совокупность поверхностей $V = h$, заключенных между поверхностями $V = h_0$ и $V = h'_0$, оставалась совокупностью поверхностей без контакта. В силу условия $\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0$, R станет отрицательным, а состояние равновесия неустойчивым. Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и пусть поверхность $|x_s| = \varepsilon_1$ лежит целиком между поверхностями $V = h_1$ и $V = h'_1$. Так как при $\lambda = \lambda_0$ вся совокупность поверхностей $V = h$, расположенных между поверхностями $V = h_0$ и $V = h'_1$, является совокупностью поверхностей без контакта (как бы ни была мала ε_1 -окрестность состояния равновесия), можно указать столь малый интервал значений λ : $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_2$ ($\lambda_2 = \lambda_0 + \eta_0 < \lambda_0 + \eta$), чтобы для любого $\lambda = \lambda^*$ из этого интервала эта совокупность поверхностей оставалась совокупностью поверхностей без контакта. Таким образом, для $\lambda = \lambda^*$, где $|\lambda_0 - \lambda^*| < \eta_0$, траектория, проходящая через точку $x_s(t_0)$ внутри ε_0 -окрестности состояния равновесия, через конечный промежуток времени (для $t = t_1$), пересечет границу ε_1 -окрестности и останется там для всех $t > t_1$.

¹ Ляпунов [1], стр. 133 и 147.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L(\lambda_0) > 0$, $\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0$ и пусть λ^* — фиксированное значение параметра: $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (независящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, такие t_0 и t_1 ($t_1 > t_0$) и такие траектории $x_s(t, \lambda)$, что из неравенства $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$ для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства $|x_s(t_0, \lambda^*)| < \varepsilon_1$, $|x_s(t_1, \lambda^*)| > \varepsilon_0$ (t_0 и t_1 могут быть различны для различных траекторий).

Таким образом, при возрастании параметра, состояние равновесия при $\lambda = \lambda_0$ из устойчивого становится неустойчивым. Изображающая точка срывается с состояния равновесия и отбрасывается на достаточно далекое расстояние. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия, когда оно опять становится устойчивым. Система ведет себя *необратимо*.

Доказательство. Так как $L(\lambda_0) > 0$, то, как показал Ляпунов, для $\lambda = \lambda_0$ состояние равновесия будет неустойчиво в том смысле, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что, каково бы ни было положительное $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, всегда можно выделить внутри ε_1 -окрестности состояния равновесия такую поверхность без контакта, что все траектории $x_s(t, \lambda_0)$, пересекающие ее, через конечный промежуток времени покидают ε_0 -окрестность состояния равновесия. Для $\lambda \geq \lambda_0$ существует континуум поверхностей $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$, являющихся для траекторий $x_s(t, \lambda_0)$ системой поверхностей без контакта (эффективное построение такой системы поверхностей без контакта было осуществлено Ляпуновым¹).

Выделим из системы поверхностей $V = h$ две близкие поверхности $V = h_0$ и $V = h'_0$ и рассмотрим столь малые куски их σ_0 и σ'_0 , чтобы границы области $|x_s| = \varepsilon_0$ не пересекали их и оставляли одну внутри области $|x_s| = \varepsilon_0$, другую — снаружи.

Будем теперь так мало менять параметр λ , чтобы при $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0$ совокупность поверхностей $V = h$ между поверхностями $V = h_0$ и $V = h'_0$ оставалась совокупностью

¹ Ляпунов, стр. 133 и 147.

поверхностей без контакта для траекторий, пересекающих σ_0 и σ'_0 (всегда можно считать, что все траектории, пересекающие σ_0 , пересекают и σ'_0). В силу условия $\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0$ R станет положительным, а состояние равновесия устойчивым. Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и пусть поверхность $|x_s| = \varepsilon_1$ оставляет внутри себя малый кусок σ_1 поверхности без контакта $V = h_1$, который отображается траекториями, пересекающими его, на кусок $\bar{\sigma}_0$ поверхности $V = h_0$ ($\bar{\sigma}_0 \subset \sigma_0$). Так как при $\lambda = \lambda_0$ σ_1 может быть заключено в сколь угодно малой ε_1 -окрестности начала, и при этом совокупность поверхностей $V = h$ между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_0$ будет совокупностью поверхностей без контакта для траекторий, пересекающих σ_1 , всегда можно указать столь малый интервал значений λ : $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_0$ ($\lambda_2 = \lambda_0 - \eta_0$), чтобы для любого $\lambda = \lambda^*$ из этого интервала эта совокупность поверхностей оставалась совокупностью поверхностей без контакта.

Таким образом, для $\lambda = \lambda^*$, где $|\lambda_0 - \lambda^*| < \eta_0$, траектории, пересекающие для $t = t_0$ (t_0 — различно для различных траекторий) кусок σ_1 поверхности без контакта, содержащейся в ε_1 -окрестности состояния равновесия для соответствующего конечного $t = t_1$ (t_1 различно для разных траекторий), пересекут границу ε_0 -окрестности.

Будем теперь рассматривать изменение параметра λ на малом интервале $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$, где λ_0 определяется из условия $r(\lambda_0) = 0$, и пусть $l(\lambda_0)$ — первая ляпуновская величина, характеризующая в этом случае устойчивость при $\lambda = \lambda_0$.

Теорема 3. Пусть $l(\lambda_0) \neq 0$, $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0$, и пусть λ^* фиксированное значение параметра: $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$. Тогда можно указать такое ε_0 (независящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, такие t_0 и t_1 ($t_1 > t_0$) и такие траектории $x_s(t, \lambda)$, что из неравенства $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$ для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства $|x_s(t_0, \lambda^*)| < \varepsilon_1$, $|x_s(t_1, \lambda^*)| > \varepsilon_0$ (t_0 и t_1 могут быть различны для различных траекторий).

Таким образом при возрастании параметра, когда при $\lambda = \lambda_0$ состояние равновесия становится неустойчивым, изображающая точка срывается с состояния равновесия. Система ведет себя *необратимо*.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.

Настоящие теоремы, непосредственно следующие из теорем Ляпунова, позволяют сделать ясные высказывания о поведении динамических систем при малых нарушениях условий Раута — Гурвица (деление границ области устойчивости на „безопасные“ и „опасные“). Однако наши требования $L(\lambda_0) \neq 0$ и $l(\lambda_0) \neq 0$ позволяют сделать гораздо более сильные утверждения относительно качественной структуры разбиения на траектории малой окрестности состояния равновесия и относительно изменения этой структуры при изменении параметра вблизи границы области устойчивости. Эти требования позволяют, в частности, утверждать, что для $L(\lambda_0) < 0$ при малом нарушении границы $R=0$ области устойчивости возникает устойчивый колебательный процесс достаточно малой амплитуды.

Мы не приводим здесь такого исследования качественной структуры в окрестности состояния равновесия, отсылая читателя к работам, специально посвященным этим вопросам*.

Для того чтобы дать наглядную картину поведения динамической системы вблизи „опасных“ и „безопасных“ границ области устойчивости, мы приводим в работе рисунки и описание качественной структуры окрестности состояния равновесия в случае систем двух и трех уравнений.

* Исследование зависимости от параметра качественной структуры разбиения на траектории фазовой плоскости для систем первой степени негрубости, определяемых двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, содержится в работах Андреева и Леонтьевич [20] и Андреева и Хайкина [5].

Для системы трех уравнений Леонтьевым [21] по методу малого параметра выяснены условия появления из состояния равновесия единственного периодического решения и исследована его устойчивость. Кузьмин [22] в заметке „Замечания о смене устойчивости установившегося движения“ также затронул эту проблему.

ГЛАВА II

СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА *

§ 1. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы

Рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Q(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^2 + px + q = 0,$$

где

$$p = -(a + d), \quad q = ad - bc.$$

Условия Раута — Гурвица сводятся здесь к неравенствам

$$R \equiv p = -(a + d) > 0, \quad r \equiv ad - bc > 0.$$

* В случае одного уравнения первого порядка, наша задача становится совершенно элементарной. Если уравнения движения имеют вид $\dot{x} = \alpha x + \beta x^2 + \dots$, то устойчивость определяется знаком α , а границы устойчивости даются значением $\alpha = 0$. При $\beta \neq 0$ эта граница всегда „опасная“. Критерий исчезновения состояния равновесия при изменении параметра в окрестности значения параметра $\lambda = \lambda_0$ получается весьма просто путем анализа характера зависимости координаты состояния равновесия уравнения $\dot{x} = f(x, \lambda)$ от параметра λ . Если $f' [x(\lambda_0), \lambda_0] \neq 0$, то, при сколь угодно малом изменении параметра в подходящем направлении состояние равновесия исчезает.

Развертывая P и Q в ряды по степеням x и y , положим:

$$P(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots,$$

$$Q(x, y) = Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots,$$

где

$$P_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

$$P_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

$$Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2,$$

$$Q_3(x, y) = b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3.$$

Для вычисления $L(\lambda_0)$, следуя Ляпунову, приводим систему (2.1) подстановкой

$$\xi = x, \quad \eta = -\frac{a}{\sqrt{q}}x - \frac{b}{\sqrt{q}}y \quad (a + d = 0) \quad (2.2)$$

к так называемому каноническому виду:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\sqrt{q}\eta + \bar{P}(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{q}\xi + \bar{Q}(\xi, \eta), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P} = & A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2 + A_{30}\xi^3 + A_{21}\xi^2\eta + \\ & + A_{12}\xi\eta^2 + A_{03}\eta^3 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} = & B_{20}\xi^2 + B_{11}\xi\eta + B_{02}\eta^2 + B_{30}\xi^3 + B_{21}\xi^2\eta + \\ & + B_{12}\xi\eta^2 + B_{03}\eta^3 + \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты системы (2.3) связаны с коэффициентами системы (2.1) соотношениями:

$$A_{20} = \frac{1}{b^2} (b^2 a_{20} - a b a_{11} + a^2 a_{02}),$$

$$A_{11} = \frac{\sqrt{q}}{b^2} (2a a_{02} - b a_{11}), \quad A_{02} = \frac{q}{b^2} a_{02},$$

$$A_{30} = \frac{1}{b^3} (b^3 a_{30} - a b^2 a_{21} + a^2 b a_{12} - a^3 a_{03}),$$

$$A_{21} = \frac{\sqrt{q}}{b^3} (-b^2 a_{21} + 2a b a_{12} - 3a^2 a_{03}),$$

$$A_{12} = \frac{q}{b^3} (ba_{12} - 3aa_{03}), \quad A_{03} = -\frac{q\sqrt{q}}{b^3} a_{03},$$

$$B_{20} = -\frac{1}{b^2\sqrt{q}} (a^3a_{02} - a^2ba_{11} + ab^2a_{20} + \\ + b^3b_{20} - b^2ab_{11} + ba^2b_{02}),$$

$$B_{11} = \frac{1}{b^2} (aba_{11} - 2a^2a_{20} - 2abb_{02} + b^2b_{11}),$$

$$B_{02} = -\frac{\sqrt{q}}{b^2} (aa_{02} + bb_{02}),$$

$$B_{30} = \frac{1}{b^3\sqrt{q}} (a^4a_{03} - a^3ba_{12} + a^2b^2a_{21} - ab^3a_{30} - b^4b_{30} + \\ + ab^3b_{21} - a^2b^2b_{12} + a^3bb_{03}),$$

$$B_{21} = \frac{1}{b^3} (3a^3a_{03} - 2a^2ba_{12} + ab^2a_{21} + \\ + b^3b_{21} - 2ab^2b_{12} + 3a^2bb_{03}),$$

$$B_{12} = \frac{\sqrt{q}}{b^3} (3a^2a_{03} - aba_{12} - b^2b_{12} + 3abb_{03}),$$

$$B_{03} = \frac{q}{b^3} (aa_{03} + bb_{03}).$$

Перейдем теперь к полярным координатам ρ и φ , положив $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$, и исключим t , тогда система (2.3) сведется к уравнению:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho [\bar{P}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cos \varphi + \bar{Q}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sin \varphi]}{\sqrt{q} \cdot \rho + \bar{Q} \cos \varphi - \bar{P} \sin \varphi}. \quad (2.4)$$

Так как $q \neq 0$, то правая часть (2.4) может быть развернута в окрестности начала в ряд по степеням ρ , сходящийся для всех φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) и для всех достаточно малых $\rho < \rho^*$ при любых фиксированных значениях параметров уравнения (2.1), удовлетворяющих условиям $a + d = 0$, $ad - bc > 0$.

Представим (2.4) в виде:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{q}} (\bar{P} \cos \varphi + \bar{Q} \sin \varphi) \left[1 + \left(\frac{\bar{P} \sin \varphi - \bar{Q} \cos \varphi}{\rho \sqrt{q}} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\bar{P} \sin \varphi - \bar{Q} \cos \varphi}{\rho \sqrt{q}} \right)^2 + \dots \right]$$

и затем в виде:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R_2(\varphi)\rho^2 + R_3(\varphi)\rho^3 + \dots \quad (2.5)$$

Будем искать решение уравнения (2.5), определяемое начальными условиями $\rho = \rho_0 \geq 0$ при $\varphi = 0$, в виде ряда

$$\rho = \rho_0 u_1(\varphi) + \rho_0^2 u_2(\varphi) + \rho_0^3 u_3(\varphi) + \dots, \quad (2.6)$$

сходящегося для всех φ в промежутке $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и для всех достаточно малых значений ρ_0 .

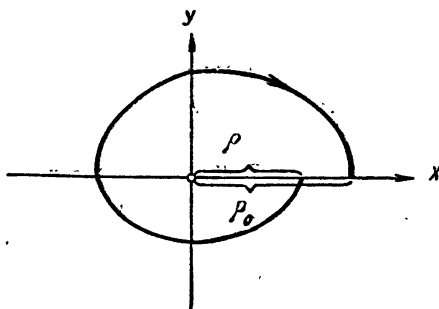


Рис. 1. К определению функции последования $\rho = \psi(\rho_0)$.

Внося выражение (2.6) в уравнение (2.5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_0 , получим для определения функции $u_j(\varphi)$ рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\frac{du_1}{d\varphi} = 0, \quad \frac{du_2}{d\varphi} = R_2(\varphi), \quad \frac{du_3}{d\varphi} = 2u_2 R_2(\varphi) + R_3(\varphi), \dots$$

с начальными условиями

$$u_1(0) = 1, \quad u_k(0) = 0 \quad (k \neq 1),$$

из которых последовательно определяем $u_1(\varphi)$, $u_2(\varphi)$, $u_3(\varphi)$, ...

Полагая затем $\varphi = 2\pi$ и вводя обозначения $\alpha_j = u_j(2\pi)$, получаем на отрезке $\varphi = 0$ „функцию последования“ (рис. 1),

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots = \psi(\rho_0). \quad (2.7)$$

Ляпуновское $L(\lambda_0)$ совпадает в этом простейшем случае с α_3 . Вычисление дает для α_3 следующее выражение через коэффициенты преобразованной системы:

$$\alpha_3 = \int_0^{2\pi} (2u_2 R_2 + R_3) d\varphi = \frac{\pi}{4q} [2(A_{02}B_{02} - A_{20}B_{20}) - \\ - B_{11}(B_{02} + B_{20}) + A_{11}(A_{02} + A_{20}) + \\ + 3\sqrt{q}(A_{30} + B_{03}) + \sqrt{q}(A_{12} + B_{21})].$$

Подставляя значения коэффициентов A_{ji} , B_{ji} в полученную формулу, находим для $L(\lambda_0)$ после упрощений следующее выражение:

$$L(\lambda_0) = -\frac{\pi}{4bq\sqrt{q}} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + \\ + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - \\ - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) - \\ - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] - \\ - (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + \\ + (ca_{12} - bb_{21})] \}. \quad * \quad (2.8)$$

От коэффициентов в полиномах $P_4(x, y)$, $Q_4(x, y)$... величина $L(\lambda_0)$, как это следует из (2.8), не зависит.

Знак $L(\lambda_0)$, согласно Ляпунову, определяет устойчивость состояния равновесия для тех бифуркационных значений параметров системы, при которых система имеет чисто мнимые корни. Согласно теоремам (1) и (2), знак $L(\lambda_0)$ определяет также и существенные черты поведения системы при отличных от нуля, но достаточно малых действительных частях корней характеристического уравнения (вблизи границы $R=0$ диаграммы устойчивости).

Случай $L(\lambda_0) = 0$ не рассматривается.

* См. Баутин [23].

§ 2. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы

Рассмотрим вспомогательную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + \mu P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + \mu Q(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

где μ — малый параметр.

При $\mu = 1$ система (2.9) совпадает с (2.1). Будем также предполагать, что $ad - bc > 0$, $a + d = 0$ и, кроме того, $c > 0$ *

Чтобы найти требуемое выражение для $L(\lambda_0)$, воспользуемся методом Пуанкаре.

При наших предположениях ($a + d = 0$, $ad - bc > 0$) систему (2.9) можно также записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -H'_y(x, y) + \mu P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= H'_x(x, y) + \mu Q(x, y), \end{aligned} \right\}$$

где

$$H(x, y) = \frac{cx^2}{2} - axy - \frac{by^2}{2}.$$

Выделим внутри области сходимости (2.6) некоторую кривую C_{h_0} семейства $H(x, y) = \frac{h^2}{2}$ и введем вблизи C_{h_0} новую систему координат s, δ (рис. 2) с помощью уравнений:

$$H(x, y) = \frac{(h_0 + \delta)^2}{2}; \quad n(x, y; s) = 0, \quad (2.10)$$

где $n(x, y; s) = 0$ для каждого s есть дуга без контакта, совпадающая при $s = 0$ с отрезком $\varphi = 0$; s — циклическая координата, такая, что $\frac{ds}{dt} = 1$ на кривой C_{h_0} . Из (2.10) имеем: $x = f_1(s, h)$, $y = f_2(s, h)$, причем $x = f_1(s, h_0) = \varphi(s)$, $y = f_2(s, h_0) = \psi(s)$ суть уравнения кривой C_{h_0} .

* Последнее всегда может быть достигнуто изменением обозначений (заменой x через y , и наоборот).

Воспользовавшись тождествами

$$H[f_1(s, h), f_2(s, h)] = \frac{h^2}{2}, \quad H'_x f'_{1s} + H'_y f'_{2s} = 0,$$

$$H'_x f'_{1h} + H'_y f'_{2h} = h,$$

получаем в новых координатах

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\mu [P(f_1, f_2) f'_{2s} - Q(f_1, f_2) f'_{1s}]}{h - \mu [P(f_1, f_2) f'_{2h} - Q(f_1, f_2) f'_{1h}]} = R(\delta, s, \mu). \quad (2.11)$$

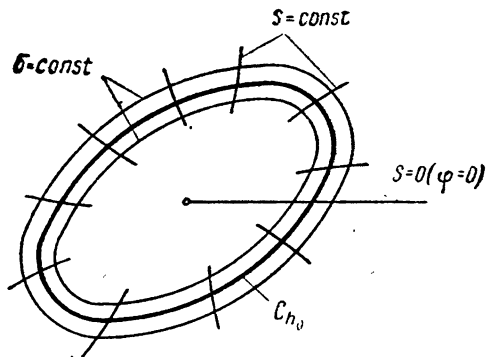


Рис. 2. Система координат δ, s в окрестности кривой C_{h_0} .

Следуя Пуанкаре [9], решение $\delta = \delta(s)$ уравнения (2.11) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра μ и начального значения $\delta_0 = \delta(0)$:

$$\delta = C_{10}(s) \delta_0 + C_{01}(s) \mu + C_{20}(s) \delta_0^2 + C_{11}(s) \delta_0 \mu + C_{02}(s) \mu^2 + \dots \quad (2.12)$$

с начальными условиями $C_{10}(0) = 1$, $C_{j\ell}(0) = 0$ ($j, \ell \neq 1, 0$). Развертывая (2.11) в ряд по δ и μ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} = & \mu R_\mu(0, s, 0) + \delta \mu \cdot R''_{\mu\delta}(0, s, 0) + \\ & + \mu^2 \cdot \frac{1}{2} R''_{\mu^2}(0, s, 0) + \dots, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$R'_{\mu} (0, s, 0) = \frac{1}{h_0} [\dot{\psi} P(\varphi, \psi) - \dot{\varphi} Q(\varphi, \psi)],$$

$$R''_{\mu\delta} (0, s, 0) = \frac{1}{h_0} \left[\frac{d}{ds} (P f'_{2h} - Q f'_{1h}) + \right. \\ \left. + (f'_{1h} f'_{2s} - f'_{2h} f'_{1s}) (P'_x + Q'_y) - \frac{1}{h_0} (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) \right],$$

$$R''_{\mu\delta} (0, s, 0) = \frac{2}{h_0^2} (P f'_{2h} - Q f'_{1h}) (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}).$$

Подставляя (2.12) в (2.13) и сравнивая коэффициенты при δ_0 и μ , получаем рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_{10} &= 0, \\ \dot{C}_{01} &= R'_{\mu}, \\ \dot{C}_{11} &= C_{10} R''_{0\mu}, \\ \dot{C}_{02} &= C_{01} R''_{\mu\delta} + \frac{1}{2} R''_{\mu\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

из которых, принимая во внимание начальные условия, находим:

$$C_{10}(s) = 1,$$

$$C_{01}(s) = \frac{1}{h_0} \int_0^s (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) d\xi,$$

$$C_{02}(s) = \int_0^s \left\{ \left[\frac{1}{h_0} \int_0^{\xi} (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) dt \right] \left[\frac{1}{h_0} \cdot \frac{d}{ds} (P f'_{2h} - Q f'_{1h}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{h_0} (P'_x + Q'_y) (f'_{1h} f'_{2s} - f'_{2h} f'_{1s}) - \frac{1}{h_0^2} (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_0^2} (P f'_{2h} - Q f'_{1h}) (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) \right\} d\xi.$$

Последнее выражение можно несколько упростить, записав его в виде:

$$C_{02}(s) = \int_0^s \left\{ \frac{1}{h_0^2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left[(Pf'_{2h} - Qf'_{1h}) \int_0^\xi (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) dt - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2h_0} \left(\int_0^\xi (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) dt \right)^2 \right] \right\} d\xi + \frac{1}{h_0^2} \int_0^s \left[\int_0^\xi (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) dt \right] \times \\ \times (P'_x + Q'_y) (f'_{1h} f'_{2s} - f'_{2h} f'_{1s}) d\xi.$$

Заметим также, что $f'_{1h} f'_{2s} - f'_{2h} f'_{1s} = (f'_{1h} H'_x + f'_{2h} H'_y) \frac{dt}{ds} = h_0$.

Полагая в (2.12) $s = \tau$, где $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{q}}$ период на кривой C_{h_0} , получаем на отрезке $s = 0$ или, что то же, на отрезке $\varphi = 0$ функцию последования

$$\delta = \delta_0 + C_{01}(\tau) \mu + C_{11}(\tau) \delta_0 \mu + C_{02}(\tau) \mu^2 + \dots \quad (2.15)$$

Нужные нам в дальнейшем $C_{01}(\tau)$ и $C_{02}(\tau)$ примут вид:

$$\left. \begin{aligned} C_{01}(\tau) &= \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) d\xi, \\ C_{02}(\tau) &= \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}} \left[\int_0^\xi (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) ds \right] (P'_x + Q'_y) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Очевидно, что $C_{k0}(\tau) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$), так как при $\mu = 0$ уравнение (2.11) должно иметь решение $\delta = \delta_0$.

Построенная таким образом на отрезке $s = 0$ функция последования (2.15) для каждого $\mu = \text{const}$ совпадает в окрестности точки пересечения отрезка $s = 0$ с кривой C_{h_0} с построенной ранее функцией последования (2.7) [представляя собой преобразование (2.7) к новым координатам]. Найдем связь между $\rho - \rho_0$ и $\delta - \delta_0$.

Из формул преобразования (2.2) находим, что на отрезке $\varphi = 0$ ($\eta = 0$) будет $\rho = \xi = x$. Уравнение этого

отрезка в координатах x, y будет $ax + by = 0$. В уравнении $H(x, y) = \frac{(h_0 + \delta)^2}{2}$ положим $y = -\frac{a}{b}x = -\frac{a}{b}\rho$ и таким образом получим искомую связь между ρ и δ :

$$\frac{\rho \sqrt{q}}{\sqrt{-b}} = h_0 + \delta. \quad (2.17)$$

Соотношение (2.17) позволяет установить связь между коэффициентами функций последования (2.7) и (2.15).

Из (2.7) и (2.17) имеем:

$$\delta - \delta_0 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{-b}} (\rho - \rho_0) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{-b}} \alpha_3 \rho_0^3 + \dots;$$

или

$$\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{-b}} \alpha_3 \rho_0^3 + \dots = C_{01}\mu + C_{11}\delta_0\mu + C_{02}\mu^2 + \dots \quad (2.18)$$

Представим теперь левую и правую части (2.18) в виде ряда по μ, h_0 и δ_0 . При этом введение μ в левую часть соответствует вычислению функции последования (2.7) для системы (2.9), отличающейся от (2.1) множителем μ у коэффициентов нелинейных членов. Из (2.8) видим, что α_3 примет тогда вид:

$$\alpha_3 = A_1\mu + A_2\mu^2. \quad (2.19)$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{-b}} (A_1\mu + A_2\mu^2) \left[\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{q}} (h_0 + \delta_0) \right]^3 + \dots = \\ & = \mu \left[(C_{01})_{h_0=0} + h_0 \left(\frac{d}{dh_0} C_{01} \right)_{h_0=0} + \frac{h_0^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dh_0^2} C_{01} \right)_{h_0=0} + \right. \\ & + \left. \frac{h_0^3}{3!} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{01} \right)_{h_0=0} + \dots \right] + \mu^2 \left[(C_{02})_{h_0=0} + \right. \\ & + \left. h_0 \left(\frac{d}{dh_0} C_{02} \right)_{h_0=0} + \frac{h_0^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dh_0^2} C_{02} \right)_{h_0=0} + \right. \\ & + \left. \frac{h_0^3}{3!} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{02} \right)_{h_0=0} + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при членах, содержащих μh_0^3 и $\mu^2 h_0^3$, выражаем A_1 и A_2 через C_{01} и C_{02} , получая тем самым α_3 в виде интеграла.

Очевидно, что

$$A_1 = -\frac{q}{3!b} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{01} \right)_{h_0=0}; \quad A_2 = -\frac{q}{3!b} \left(\frac{d}{dh_0^3} C_{02} \right)_{h_0=0},$$

то есть

$$L(\lambda_0) = -\frac{q}{3!b} \left\{ \frac{d^3}{dh_0^3} \cdot \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}} [P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi} + (P_{x'} + Q_{y'}) \int_0^{\xi} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) ds] d\xi \right\}_{h_0=0}, \quad (2.20)$$

где

$$x = \varphi = h_0 \sqrt{-\frac{b}{q}} \cos t \sqrt{q},$$

$$y = \psi = \frac{h_0}{\sqrt{-bq}} (a \cos t \sqrt{q} + \sqrt{q} \sin t \sqrt{q}).$$

Примечание 1. Заметим, что хотя последнее выражение для $L(\lambda_0)$ и вычисляется при помощи специального приема, связанного с введением консервативной системы, однако оно не связано ни с какими предположениями о близости исходной системы к использованной консервативной и, следовательно, с какими бы то ни было требованиями малости в правых частях системы (2.1).

Примечание 2. Выражение (2.20) позволяет, в частности, выяснить соотношение между некоторыми результатами, получаемыми без предположения о малости нелинейных членов в правых частях системы (2.1) и такими же результатами, получаемыми по методу малого μ .

Часто обнаруживается, что результаты, полученные по методу малого μ , качественно совпадают с результатами эксперимента, хотя фактические уравнения движения не могут рассматриваться как относящиеся к случаю малого μ .

Результаты настоящего параграфа позволяют точно установить в вопросе появления устойчивого или неустойчивого предельного цикла, когда имеется такое совпадение результатов „теории малого μ “ и „теории большого μ “ („чудо малого μ “) и когда такое совпадение может не иметь места.

Легко обнаружить, что первое слагаемое, входящее в состав $L(\lambda_0)$:

$$A_1 = -\frac{q}{3!b} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{V\bar{a}}} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) d\xi \right]_{h_0=0}$$

отлично от нуля только для членов *третьего* порядка, входящих в разложения P и Q по степеням x и y , а второе:

$$A_2 = -\frac{q}{3!b} \left\{ \frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{V\bar{a}}} \left[(P'_x + Q'_y) \int_0^{\xi} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) ds \right] d\xi \right\}_{h_0=0}$$

отлично от нуля только для членов *второго* порядка в разложениях P и Q .

Заметив теперь из выражения (2.19), что для малого μ величина $L(\lambda_0)$ дается *первым* слагаемым в (2.20), видим, что в том случае, когда среди нелинейных членов системы (2.1) не имеется членов второго порядка, действительно должно быть совпадение в результатах, полученных по методу малого μ и по методу, не связанному с малой нелинейностью.

Очевидно также, что применение метода малого μ к системам, содержащим квадратичные члены, не может быть использовано даже для качественного суждения о характере появляющихся периодических решений в системах, не близких к линейным консервативным.

В том случае, когда характеристики системы содержат квадратичные члены и не имеют членов третьего порядка, метод малого μ дает для $L(\lambda_0)$ выражение в виде второго слагаемого в формуле (2.20) (при этом из так называемых вторых приближений [24]).

§ 3. Выражение для $l(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы

Пусть для системы (2.1) выполняются теперь условия $ad - bc = 0$, $a + d < 0$ (для определенности пусть $a \neq 0$).

Подстановка $z = cx - ay$, $t = \frac{a}{a^2 + bc} \cdot \tau$ приводит системе (2.1) к виду:

$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{b}{a^2 + bc} z + \dots,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{a(a^2 + bc)} \left\{ (ca_{02} - ab_{02}) z^2 + [a(ab_{11} - ca_{11}) + 2c(ab_{02} - ca_{02})] zx + [a^2(ca_{20} - ab_{20}) + ac(ca_{11} - ab_{11}) + c^2(ca_{02} - ab_{02})] x^2 \right\} + \dots,$$

откуда, следуя Ляпунову, получаем:

$$l(\lambda_0) = \frac{1}{a(a^2 + bc)} (ca_{02} - ab_{02}) + \frac{1}{a(a^2 + bc)^2} [ab(ab_{11} - ca_{11}) + 2bc(ab_{02} - ca_{02})] + \frac{1}{a(a^2 + bc)^3} [a^2b^2(ca_{20} - ab_{20}) + ab^2c(ca_{11} - ab_{11}) + b^2c^2(ca_{02} - ab_{02})]. \quad (2.21)$$

Необращение в нуль величины $l(\lambda_0)$, согласно Ляпунову, свидетельствует о неустойчивости состояния равновесия для тех бифуркационных значений параметров системы (2.1), при которых характеристическое уравнение имеет один нулевой и один отрицательный корень.

Согласно теореме 3, необращение в нуль $l(\lambda_0)$ на границе $r = 0$ определяет также и существенные черты поведения системы вблизи границы $r = 0$ [если $l(\lambda_0) \neq 0$, то граница $r = 0$ „опасная“].

Заметим здесь, что отсутствие срывов изображающей точки на границе $r = 0$ может осуществляться только при условии $l(\lambda_0) = 0$ и некотором дополнительном условии, т. е. „безопасность“ при приближении к границе $r = 0$ требует выполнения по меньшей мере двух условий, наложенных на коэффициенты системы дополнительно к условию $r = 0$; и в этом смысле труднее осуществима в сравнении с „безопасностью“ на границе $R = 0$, для осуществления которой необходимо выполнение только одного условия.

§ 4. Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при переходе через границу области устойчивости

Мы получим наглядную картину поведения динамической системы вблизи границ области устойчивости, если рассмотрим изменение качественной структуры в окрестности состояния равновесия в зависимости от изменения параметра.

Как оказывается [20], здесь возможны следующие случаи:

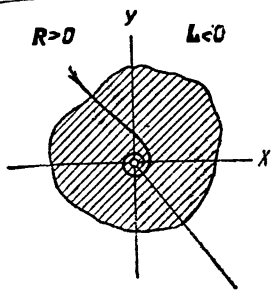
а) $L(\lambda_0)$ — отрицательно.

При переходе через границу $R=0$ от положительных значений к отрицательным появляется единственный *устойчивый* предельный цикл. При обратном изменении параметра, устойчивый предельный цикл стягивается в точку.

б) $L(\lambda_0)$ — положительно.

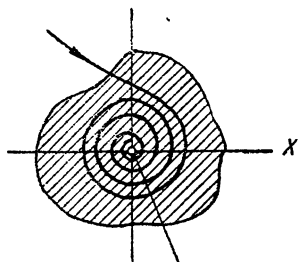
При переходе через границу $R=0$ от положительных значений к отрицательным к состоянию равновесия стягивается единственный *неустойчивый* предельный цикл; при обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл.

Качественная структура разбиения окрестности состояния равновесия на траектории для этих двух случаев изображена на рис. 3 и 4. Штриховкой показана область устойчивости, для которой траектории представляют собой спирали, *накручивающиеся* на состояние равновесия, или предельный цикл. Область неустойчивости заполнена *раскручивающимися* спиралями. Рисунки наглядно показывают различие в поведении системы вблизи границы по отношению к случайным точкам. Сравнивая для $R > 0$ случай $L(\lambda_0) < 0$ и $L(\lambda_0) > 0$, видим, что во втором случае возможно „выбивание“ случайным толчком изображающей точки из устойчивого состояния равновесия за границы области устойчивости (внутри рассматриваемой окрестности состояния равновесия), тогда как в первом случае это невозможно. Рисунки показывают, далее, различие в поведении системы при нарушении условий устойчивости Раута — Гурвица. Переход через границу $R=0$ в первом случае [$L(\lambda_0) < 0$] соответствует *возникновению области неустойчивости* внутри устойчивого предельного цикла, которая, однако, остается сколь угодно малой при достаточно малом нарушении условия устойчивости и стяги-



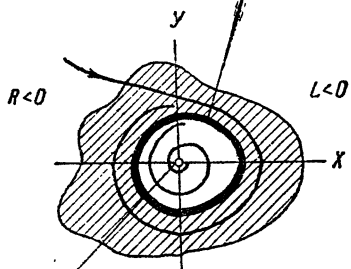
Устойчивый фокус

$R = 0$ $L < 0$



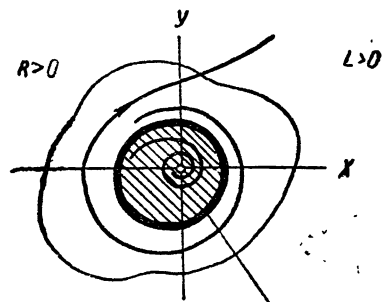
Сложный фокус

Устойчивый предельный цикл

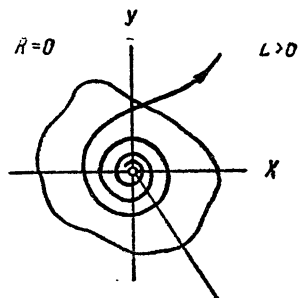


Неустойчивый фокус

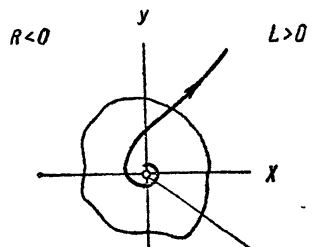
Рис. 3.



Неустойчивый предельный цикл



Сложный фокус



Неустойчивый фокус

Рис. 4.

Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при изменении знака R .

вается в точку при обратном изменении параметра; изображающая точка при этом возвращается в состояние равновесия — система ведет себя *обратимо*. Во втором случае [$L(\lambda_0) > 0$] переход через границу $R=0$ соответствует *исчезновению области устойчивости* внутри неустойчивого предельного цикла; изображающая точка при этом срывается с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой

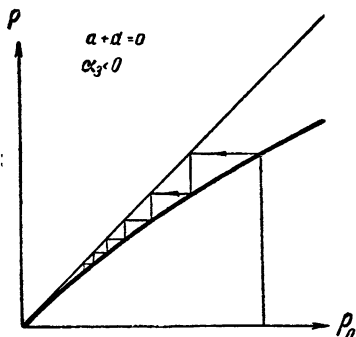


Рис. 5. Функция последования в окрестности устойчивого фокуса.

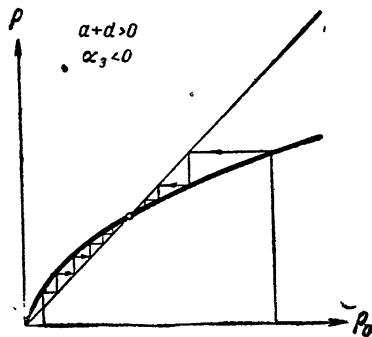


Рис. 6. Функция последования при наличии устойчивого предельного цикла в малой окрестности начала координат.

окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия — система ведет себя *необратимо*.

Исследование поведения траекторий системы (2.1) в окрестности состояния равновесия может быть проведено с помощью рассмотрения поведения функции последования $\rho = \psi(\rho_0)$ в окрестности начала координат. Предельные циклы системы (2.1) соответствуют точкам пересечения кривой $\rho = \psi(\rho_0)$ с прямой $\rho = \rho_0$. Для значений параметров системы, соответствующих границе области устойчивости, функция последования дается уравнением (2.7) и, следовательно, имеет касание второго порядка с прямой $\rho = \rho_0$ в начале координат [$\psi'(0) = 1$, $\psi''(0) = 0$]. Знак $\psi''(\rho_0)$ определяется в малой окрестности начала координат знаком α_3 . Для $\alpha_3 < 0$ кривая $\rho = \psi(\rho_0)$ в окрестности начала расположена „ниже“, а для $\alpha_3 > 0$ — „выше“ прямой $\rho = \rho_0$ (рис. 5 и 8). Устойчивость состоя-

ния равновесия определяется взаиморасположением кривой $\rho = \psi(\rho_0)$ и прямой $\rho = \rho_0$, т. е. знаком α_3 . На рис. 5, 6 и 7, 8 для случаев $\alpha_3 < 0$ и $\alpha_3 > 0$ представлен графический прием („вписывание ломаной“), позволяющий, отправляясь от произвольного (достаточно малого) ρ_0 , последо-

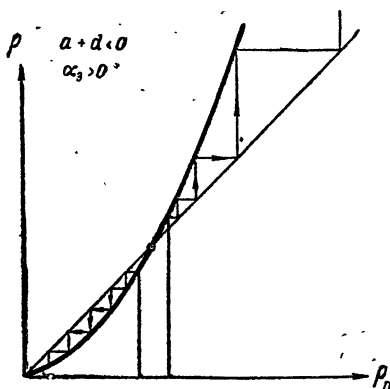


Рис. 7. Функция последования при наличии неустойчивого предельного цикла в малой окрестности начала координат.

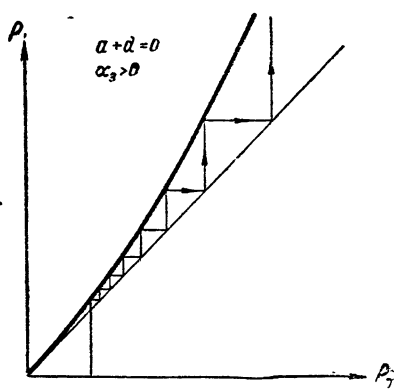


Рис. 8. Функция последования в окрестности неустойчивого фокуса.

вательно находить точки пересечения прямой $\varphi = 0$ с траекторией, накручивающейся на фокус (если $\alpha_3 < 0$) или скручивающейся с него (если $\alpha_3 > 0$).

Нетрудно показать, что для систем, представляемых в пространстве параметров точками, близкими к границе области устойчивости, выражение (2.7) для функции последования заменится таким:

$$\rho = e^{\frac{a+d}{\omega} 2\pi} \rho_0 + (a+d)\beta_2 \rho_0^2 + [\alpha_3 + (a+d)\beta_3] \rho_0^3 + \dots \equiv \psi(\rho_0),$$

где ω , β_2 , β_3 — некоторые функции параметров системы, конечные на границе области устойчивости.

Если $a+d$ и α_3 будут иметь одинаковые знаки, то в достаточно малой окрестности начала координат (независимо от близости к границе $R=0$, т. е. от малости выра-

жения $a + d$) кривая $\psi(\rho_0)$ будет опять расположена по одну сторону от прямой $\rho = \rho_0$; если же выражения $a + d$ и α_3 будут иметь разные знаки, то кривая $\psi(\rho_0)$ в окрестности начала пересекает прямую $\rho = \rho_0$ (в зависимости от малости выражения $a + d$ точка пересечения может лежать сколь угодно близко к началу координат). Рис. 5 и 6 и, соответственно, 7 и 8 иллюстрируют появление или, соответственно, исчезновение точки пересечения кривой $\psi(\rho_0)$ и прямой $\rho = \rho_0$ в окрестности начала координат (т. е. рожде-

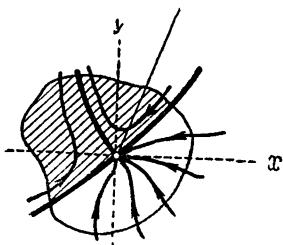


Рис. 9. Случай $r = 0, l \neq 0$. Качественная структура в окрестности сложной особой точки типа седло — узел.

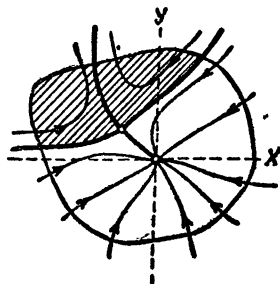


Рис. 10. Случай $r > 0$. Качественная структура в окрестности устойчивой особой точки вблизи границы $r = 0$.

ние устойчивого или стягивание неустойчивого предельного цикла) при изменении параметров, соответствующем нарушению границы области устойчивости.

Геометрический смысл условия $l(\lambda_0) \neq 0$ заключается в том, что при выполнении двух условий $r = 0, l(\lambda_0) \neq 0$ для системы (2.1) в начале координат сливаются два простых состояния равновесия, образуя сложную особую точку типа седло — узел (рис. 9). Вблизи границы $r = 0$ малая окрестность состояния равновесия имеет вид, изображенный на рис. 10. Из этого рисунка видно, как при приближении к границе $r = 0$ в малую окрестность устойчивого состояния равновесия „вторгается“ область неустойчивости (на рисунке покрытая штриховкой), попав в которую изображающая точка „выбрасывается“ из рассматриваемой окрестности состояния равновесия.

Для системы (2.1) при приближении к границе $r=0$ возрастает опасность быть выброшенной случайным толчком из устойчивого состояния равновесия. При $r < 0$ состояние равновесия в начале неустойчиво (рис. 11).

Заметим также, что, при подходящем введении параметра, двойная точка может исчезнуть при сколь угодно малом изменении параметров системы (рис. 12).

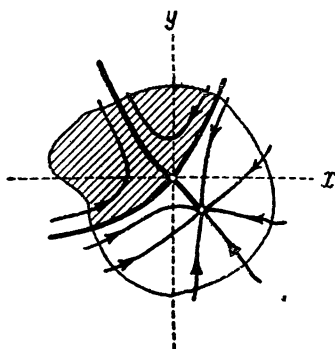


Рис. 11. Случай $r < 0$. Качественная структура в окрестности особой точки вблизи границы $r=0$.

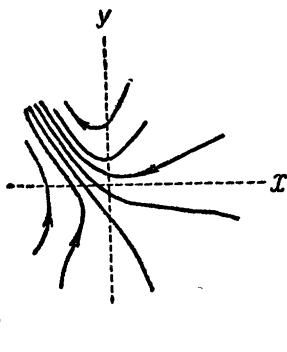


Рис. 12. Качественная структура в окрестности начала координат вблизи границы $r=0$. Состояние равновесия исчезло.

Можно указать простой аналитический критерий для суждения о возможности исчезновения состояния равновесия при введении некоторого определенного параметра. Рассмотрим систему:

$$\frac{d\xi}{dt} = P^*(\xi, \eta; \lambda), \quad \frac{d\eta}{dt} = Q^*(\xi, \eta; \lambda), \quad (2.22)$$

где P^* и Q^* — аналитические функции λ (здесь не предполагается, что $P^*(0, 0; \lambda) = Q^*(0, 0; \lambda) = 0$).

Состояния равновесия системы определяются из условий $P^*(\xi, \eta; \lambda) = 0$, $Q^*(\xi, \eta; \lambda) = 0$, определяющих в пространстве ξ, η, λ некоторую кривую. Кривая $P^* = 0$, $Q^* = 0$ для интересующего нас бифуркационного значения параметра $\lambda = \lambda_0$ [определяемого из условия $r(\lambda_0) = 0$ при дополнительном условии $l(\lambda_0) \neq 0$] имеет в плоскости $\lambda = \lambda_0$

двойную точку. В силу аналитической природы функций P^* и Q^* при этих условиях имеются только две возможности: либо плоскость $\lambda = \lambda_0$ проходит через касательную к кривой $P^* = 0$, $Q^* = 0$, либо пересекает кривую в крагной точке. В первом случае предельные значения $\frac{d\xi}{d\lambda}$ и $\frac{d\eta}{d\lambda}$ имеют в точке $(\xi_0, \eta_0, \lambda_0)$ определенное значение, во втором — это не имеет места.

Вычисляя значение $\frac{d\xi}{d\lambda}$ и $\frac{d\eta}{d\lambda}$, находим:

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \frac{\Delta_1}{r}, \quad \frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{\Delta_2}{r},$$

где:

$$r = \begin{vmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial \xi} & \frac{\partial P^*}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} & \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} & \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} & \frac{\partial Q^*}{\partial \lambda} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} & \frac{\partial P^*}{\partial \xi} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial \lambda} & \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $r = P_{\xi}^* Q_{\eta}^{*'} - Q_{\xi}^{*'} P_{\eta}^*$ для каждой пары значений ξ_0, η_0 , определяемых из уравнений $P^* = 0$, $Q^* = 0$, совпадает со свободным членом характеристического уравнения для соответствующего состояния равновесия ξ_0, η_0 , так как переход от системы (2.22) к (2.1) соответствует преобразованию координат $\xi = \xi_0 + x$, $\eta = \eta_0 + y$, в силу которого $P_{\xi}^{*'}(\xi_0, \eta_0; \lambda) = a$, $Q_{\eta}^{*'}(\xi_0, \eta_0; \lambda) = d$,

$$P_{\eta}^{*'}(\xi_0, \eta_0; \lambda) = b, \quad Q_{\xi}^{*'}(\xi_0, \eta_0; \lambda) = c.$$

В точке $(\xi_0, \eta_0; \lambda)$ имеем $r = 0$, поэтому вопрос об исчезновении состояния равновесия решается значением в этой точке определителей Δ_1 и Δ_2 (заметим, что они обращаются в нуль одновременно): если, например, $\Delta_1(\xi_0, \eta_0, \lambda_0)$ отлично от нуля, то при сколь угодно малом изменении параметра λ в подходящем направлении, состояние равновесия исчезает, если же $\Delta_1(\xi_0, \eta_0, \lambda_0) = 0$, то, при достаточно малом изменении параметра в любом направлении, состояние равновесия остается.

Примечание. Особенности в поведении динамических систем вблизи тех точек границы $R=0$, где „безопасная“ часть границы переходит в „опасную“ и где, следовательно, первый ляпуновский коэффициент $L(\lambda_0)$ обращается в нуль, определяются знаком *второй* ляпуновской величины $L_2(\lambda_0)$, для вычисления которой необходимо учесть в разложениях правых частей уравнений члены до пятого порядка включительно. В возможностях, которые здесь возникают, можно ориентироваться, построив соответствующую функцию последования.

Для значения параметра, определяемого условиями $R=0$, $L(\lambda_0)=0$, функция последования имеет вид:

$$\rho = \psi(\rho_0) = \rho_0 + \alpha_5 \rho_0^5 + \dots$$

так как вслед за α_3 необходимо и α_4 обращается в нуль*, $L_2(\lambda_0)$ совпадает с α_5 . Для значений параметра, близких к λ_0 (или в случае многих параметров для значений, близких к тем, которые определяются условиями $R=0$, $L=0$), функция последования будет иметь такую структуру:

$$\begin{aligned} \rho = \psi(\rho_0) \equiv e^{\frac{a+d}{\omega} 2\pi} & \rho_0 + (a+d) \beta_2 \rho_0^2 + [\alpha_3 + (a+d)\beta_3] \rho_0^3 + \\ & + [\alpha_3 \gamma_4 + (a+d)\beta_4] \rho_0^4 + [\alpha_5 + \alpha_3 \gamma_5 + \\ & + (a+d)\beta_5] \rho_0^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь ω , β_j , γ_i — некоторые функции параметров системы, конечные при $a+d=0$, $L=0$.

Представив (2.23) в виде:

$$\begin{aligned} \psi(\rho_0) - \rho_0 = \rho_0 \left\{ (a+d) \left[\frac{2\pi}{\omega} + \rho_0 \beta_2 + \rho_0^2 \beta_3 + \dots \right] + \right. \\ \left. + \rho_0^2 \alpha_3 [1 + \rho_0 \gamma_4 + \rho_0^2 \gamma_5 + \dots] + \rho_0^4 \alpha_5 [1 + \rho_0 \delta_6 + \dots] \right\} = 0, \end{aligned}$$

нетрудно показать [26], что если коэффициенты $a+d$, α_3 и α_5 имеют одинаковые знаки, то кривая $\rho = \psi(\rho_0)$ в малой окрестности начала лежит по одну сторону от прямой

* Ляпунов, стр. 151.

$\rho = \rho_0$, если же в ряду $a + d$, α_3 , α_5 имеется одна или две перемены знака, то в малой окрестности начала может быть, соответственно, одна или две точки пересечения кривой $\rho = \psi(\rho_0)$ с прямой $\rho = \rho_0$ и, следовательно, будут иметь место один или два предельных цикла на фазовой плоскости в малой окрестности начала координат.

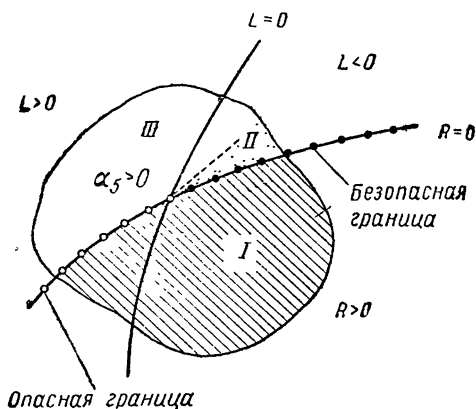


Рис. 13. Случай $\alpha_5 > 0$. Окрестность точки границы области устойчивости, отделяющей „опасную“ часть границы от „безопасной“.

Возможные типы поведения траектории системы в окрестности начала координат для значений параметров, достаточно близких к значениям, определяемым условиями $R = 0$, $\alpha_3 = 0$ ($L = 0$), приведены на рис. 13, 14 и 15, 16, соответственно, для случаев $\alpha_5 > 0$ и $\alpha_5 < 0$. Рисунки иллюстрируют усложнение структуры разбиения на траектории малой окрестности состояния равновесия системы для значений параметров, близких к значениям, разграничивающим „опасные“ и „безопасные“ части границы области устойчивости. Знак второй ляпуновской величины (α_5) играет здесь роль, совершенно подобную роли знака α_3 , увеличивая или уменьшая опасность для изображающей точки быть выброшенной из состояния равновесия.

Пусть $\alpha_5 > 0$ (при $R = L = 0$) и пусть значения параметров достаточно близки к значениям, определяемым усло-

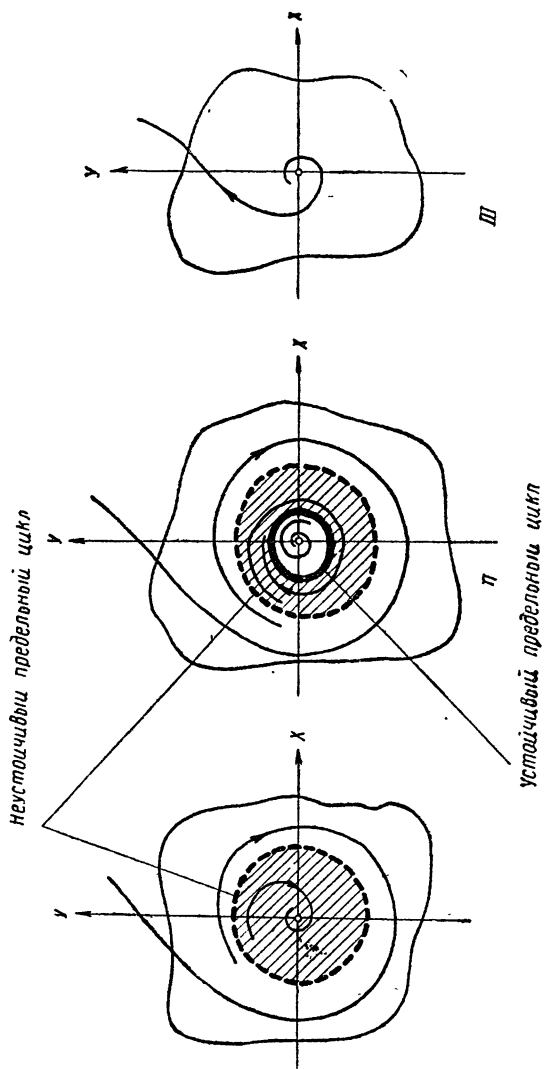


Рис. 14. Случай $\alpha_6 > 0$. Качественные структуры в окрестности состояния равновесия для значений параметров, близких к точке границы "опасную" часть от "безопасной".

виями $R=L=0$, тогда в достаточно малой окрестности начала координат в фазовом пространстве может быть одна из структур, изображенных на рис. 14.

При нарушении „безопасной“ границы области устойчивости изображающая точка остается в малой окрестности

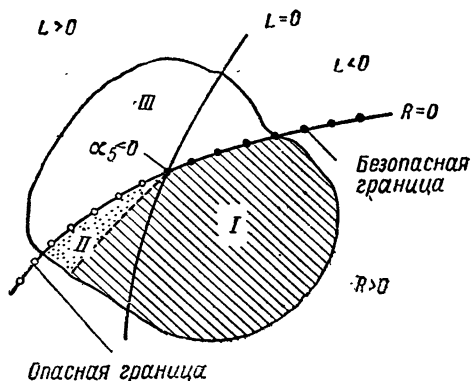


Рис. 15. Случай $\alpha_5 < 0$. Окрестность точки границы области устойчивости, отделяющей „опасную“ часть от „безопасной“.

состояния равновесия вблизи устойчивого предельного цикла, если начальные возмущения не превосходят некоторой малой величины (определяемой размерами второго *неустойчивого* предельного цикла, также вторгающегося в малую окрестность начала координат); при возмущениях, превосходящих эти пределы, изображающую точку нельзя заставить оставаться в малой окрестности состояния равновесия (рис. 14, II).

С другой стороны, „выбивание“ системы малым толчком из устойчивого состояния равновесия возможно и вблизи „безопасной“ границы области устойчивости (рис. 14, I).

Пусть $\alpha_5 < 0$ (при $R=L=0$) и пусть параметры опять мало изменены, тогда в достаточно малой окрестности начала координат может быть одна из структур, изображенных на рис. 16. Здесь нарушение „опасной“ границы может оставить изображающую точку в малой окрестности состояния равновесия, если параметры достаточно близки к значениям, определяемым условиями $R=L=0$.

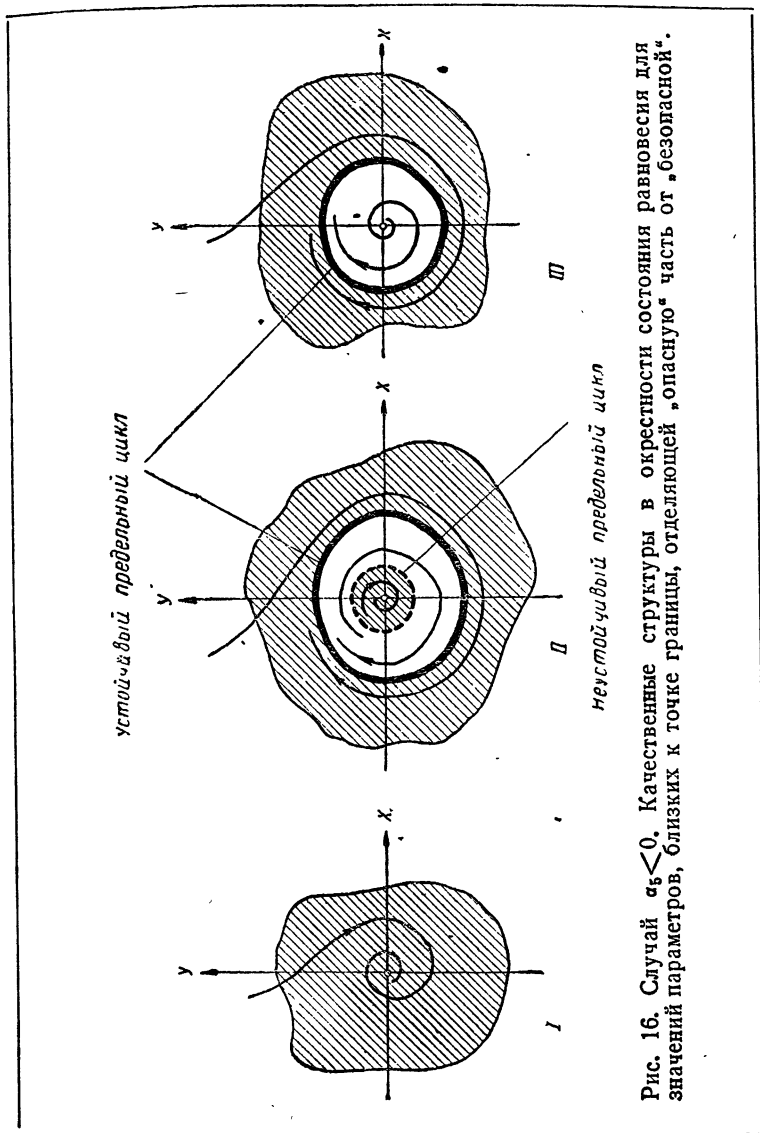


Рис. 16. Случай $\alpha_2 < 0$. Качественные структуры в окрестности состояния равновесия для значений параметров, близких к точке границы, отделяющей «опасную» часть от «безопасной».

§ 5. Примеры

1. Симметричный полет самолета в вертикальной плоскости с постоянным углом атаки

Пусть продольная ось самолета совпадает с направлением силы тяги винта, тогда уравнения движения самолета можно написать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{G}{g} \frac{dv}{dt} &= S \cos \beta - G \sin \varphi - C_w F \frac{\rho}{2} v^2, \\ \frac{G}{g} \frac{d\varphi}{dt} &= S \sin \beta - G \cos \varphi + C_a F \frac{\rho}{2} v^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где S — сила тяги винта, v — скорость самолета, φ — угол между направлением скорости центра тяжести самолета и горизонтом, G — вес самолета, g — ускорение силы тяжести, β — угол между направлением скорости центра тяжести и направлением тяги винта, F — площадь несущей поверхности, ρ — удельный вес воздуха, C_a , C_w — некоторые коэффициенты, зависящие от лобового сопротивления и подъемной силы при постоянном угле атаки [26].

Считая угол β настолько малым, что без существенной погрешности можно положить $S \cos \beta = S$ и $S \sin \beta = 0$, и вводя новые переменные τ и y с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \tau &= gt \sqrt{\frac{C_a \rho F}{2G}}, \\ y &= v \sqrt{\frac{C_a \rho F}{2G}}, \end{aligned}$$

приводим систему (2.24) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \lambda - \delta y^2 - \sin \varphi, \\ y \frac{d\varphi}{d\tau} &= y^2 - \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.25)$$

содержащему всего два параметра:

$$\lambda = \frac{S}{G}, \quad \delta = \frac{C_w}{C_a}.$$

Переносим начало координат в особую точку (φ_0, y_0) . Полагая $\varphi = \varphi_0 + \psi$, $y = \sqrt{\cos \varphi_0} + \eta$, получим в новых координатах:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\sin \varphi_0}{y_0} \psi + 2\eta + \frac{\cos \varphi_0}{2y_0} \psi^2 - \frac{\sin \varphi_0}{y_0^2} \psi \eta - \frac{1}{y_0} \eta^2 - \\ - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin \varphi_0}{y_0} \psi^3 - \frac{1}{2} \psi^2 \eta + \frac{\sin \varphi_0}{y_0^3} \psi \eta^2 + \frac{1}{y_0^2} \eta^3 + \dots,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -y_0^2 \psi - 2\delta y_0 \eta + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 \psi^2 - \delta \eta^2 + \frac{y_0^2}{6} \psi^3 + \dots$$

Координаты особых точек могут быть легко определены из уравнений:

$$\lambda - \delta y^2 - \sin \varphi = 0,$$

$$y^2 - \cos \varphi = 0.$$

Корни этой системы:

$$y_0^2 = \cos \varphi_0 = \frac{\lambda \delta \pm \sqrt{1 + \delta^2 - \lambda^2}}{1 + \delta^2}. \quad (2.26)$$

Положительному значению корня соответствует состояние равновесия типа фокуса или узла, отрицательному — седло.

Условия Раута — Гурвица дают для первой точки неравенства:

$$p = -\left(\frac{\sin \varphi_0}{y_0} - 2\delta y_0\right) > 0,$$

$$q = 2y_0^2 - \frac{\sin \varphi_0}{y_0} \cdot 2\delta y_0 > 0.$$

Если исключить с помощью (2.26) из последних неравенств координаты состояния равновесия, то первое из этих условий сведется к условию:

$$\lambda - 3\delta \cdot \frac{\lambda \delta + \sqrt{1 + \delta^2 - \lambda^2}}{1 + \delta^2} < 0,$$

а второе — к условию:

$$1 + \delta^2 - \lambda^2 > 0.$$

Эти условия ограничивают область, изображенную на рис. 17.

Замечая, что для состояния равновесия на границе $R = 0$

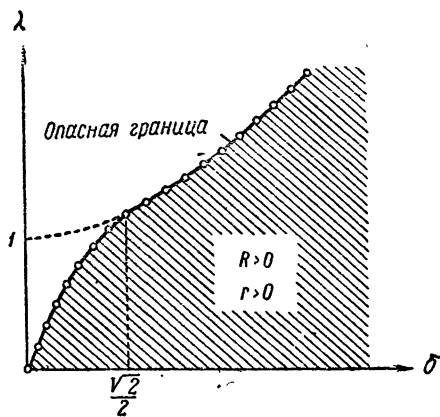


Рис. 17. Область устойчивости состояния равновесия.

имеем соотношения* $y_0^2 = \cos \varphi_0$; $\sin \varphi_0 = 2\delta \cos \varphi_0$, для коэффициентов преобразованной системы получаем:

$$a = 2\delta \sqrt{\cos \varphi_0}, \quad b = 2, \quad c = -\cos \varphi_0, \quad d = -2\delta \sqrt{\cos \varphi_0},$$

$$a_{20} = \frac{\sqrt{\cos \varphi_0}}{2}, \quad a_{11} = -2\delta, \quad a_{02} = -\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi_0}},$$

$$a_{30} = -\frac{1}{3}\delta \sqrt{\cos \varphi_0}, \quad a_{21} = -\frac{1}{2}, \quad a_{12} = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi_0}},$$

$$a_{03} = \frac{1}{\cos \varphi_0}, \quad b_{20} = \delta \cos \varphi_0,$$

$$b_{02} = -\delta, \quad b_{30} = \frac{\cos \varphi_0}{6}, \quad b_{11} = b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0.$$

Подставляя значения коэффициентов в выражение для $L(\lambda_0)$, получаем:

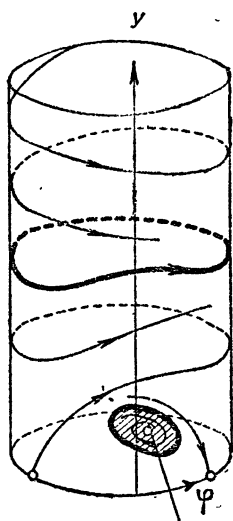
$$L(\lambda_0) = \frac{\pi\delta(4\delta^2 + 1)}{\sqrt{2}(1 - 2\delta^2)} > 0.$$

* Ибо $p = R = 0$.

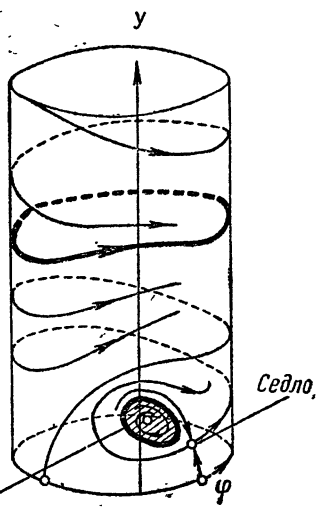
Таким образом граница $R = 0$ — „опасная“.

Ясное представление о поведении системы дает рассмотрение разбиения фазового пространства на траектории.

Выбирая за фазовое пространство цилиндр, рассмотрим вблизи границы области устойчивости некоторые характерные случаи разбиения цилиндра на траектории.



Устойчивый фокус



Неустойчивый предельный цикл

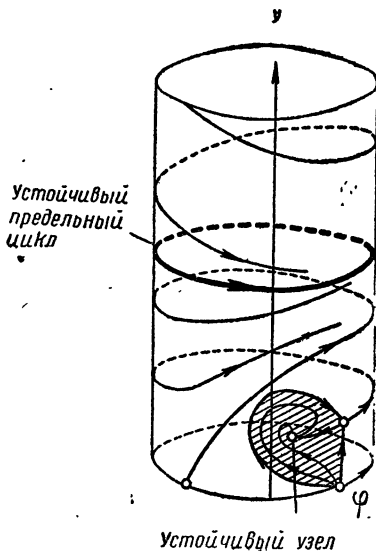
Рис. 18. Цилиндрическое фазовое пространство вблизи границы $R = 0$ ($\lambda < 1$). Устойчивое состояние равновесия соответствует прямолинейному полету; устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, — „мертвым петлям“.

Рис. 19. Цилиндрическое фазовое пространство вблизи границы $R = 0$ ($\lambda > 1$).

Рисунки 18 и 19 изображают цилиндрическое фазовое пространство, образованное склеиванием по образующим полосы $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ фазовой плоскости φ, \dot{y} .

Рисунок 18 соответствует $\lambda < 1$, рис. 19 $\lambda > 1$ (в обоих случаях „не слишком далеко“ от границы $R = 0$).

Область устойчивости, для точек которой элементом притяжения является состояние равновесия (внутренность неустойчивого предельного цикла, не охватывающего цилиндр), стягивается при приближении к границе $R=0$ к состоянию равновесия. При достаточной близости к границе $R=0$ система случайным толчком может быть выбита из состояния равновесия.



Устойчивый узел

Рис. 20. Цилиндрическое фазовое пространство вблизи границы $r=0$.

полняется условие $l(\lambda_0) \neq 0$. В самом деле, заметив, что на границе $r=0$, имеем соотношения:

$$y_0^2 = \delta \sin \varphi_0 \quad (ad - bc = 0)$$

и

$$y_0^2 = \cos \varphi_0 = \frac{\lambda \delta}{1 + \delta^2},$$

получаем для коэффициентов преобразованной системы:

$$a = \frac{y_0}{\delta}, \quad b = 2, \quad c = -y_0^2, \quad d = -2\delta y_0, \quad a_{20} = \frac{y_0}{2},$$

$$a_{11} = -\frac{1}{\delta}, \quad a_{02} = -\frac{1}{y_0},$$

$$b_{20} = \frac{y_0^2}{2\delta}, \quad b_{11} = 0, \quad b_{02} = -\delta.$$

Подставляя значение коэффициентов в выражение (2.21) для $l(\lambda_0)$, получаем:

$$l(\lambda_0) = - \frac{2\delta^3(1+\delta^2)}{\lambda(1-2\delta^2)} \neq 0$$

(на границе $r=0$: $1-2\delta^2 < 0$).

Таким образом, также и вблизи границы $r=0$ может происходить „выбивание“ системы из устойчивого состояния равновесия случайным толчком.

Качественная структура разбиения цилиндра на траектории вблизи границы $r=0$ изображена на рис. 20.

ГЛАВА III

СИСТЕМА ТРЕХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 + a_3^{(1)}x_3 + P_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_1^{(2)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + a_3^{(2)}x_3 + P_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1^{(3)}x_1 + a_2^{(3)}x_2 + a_3^{(3)}x_3 + P_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь P_j — не содержат членов ниже второго измерения. Характеристическое уравнение системы (3.1) будет:

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x \end{vmatrix} = 0, \quad (3.2)$$

или

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} p &= -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}), \\ q &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}, \\ r &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Условия Раута — Гурвица сводятся здесь к условиям:

$$p > 0, q > 0, r > 0, R \equiv pq - r > 0.$$

Границами области устойчивости служат поверхности $r = 0$ и $R = 0$ (точнее: те части этих поверхностей, для которых выполняются условия $p > 0, q > 0$). На первой из них характеристическое уравнение имеет корень, равный нулю, на второй — чисто мнимые корни. Рисунок 21 дает геометрическую интерпретацию условий Раута — Гурвица в пространстве p, q, r . Области устойчивости соответствует здесь внутренность гиперболического параболоида, расположенная для положительных p и q над плоскостью $r = 0$. Границами служат поверхность гиперболического параболоида $R = 0$ и плоскость $r = 0$.

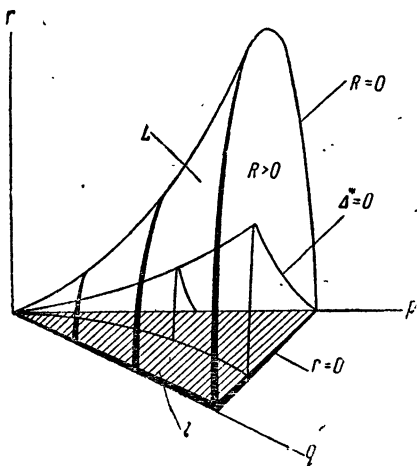


Рис. 21. Геометрическая интерпретация условий Раута — Гурвица в пространстве параметров p, q, r .

§ 1. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты системы, приведенной к каноническому виду

Для вычисления $L(\lambda_0)$, следуя Ляпунову *, приводим опять систему (3.1) к каноническому виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -p\xi_1 + Q_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\sqrt{q} \cdot \xi_3 + Q_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \sqrt{q} \cdot \xi_2 + Q_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

* Ляпунов, стр. 71.

где $-p = a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}$ — действительный корень характеристического уравнения, а \sqrt{q} — модуль каждого из чисто мнимых корней (легко проверить, что при условии $R=0$ характеристическое уравнение действительно имеет корни $-p, i\sqrt{q}, -i\sqrt{q}$).

Ищем решение линейной системы (на границе $R=0$) в виде:

$$x_1^{(k)} = \sigma_{1k} e^{\lambda_k t}, \quad x_2 = \sigma_{2k} e^{\lambda_k t}, \quad x_3 = \sigma_{3k} e^{\lambda_k t}, \quad (3.5)$$

где $\lambda_1 = -p, \lambda_2 = i\sqrt{q}, \lambda_3 = -i\sqrt{q}$.

Для определения σ_{jk} получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1k}(a_1^{(1)} - \lambda_k) + \sigma_{2k}a_2^{(1)} + \sigma_{3k}a_3^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{1k}a_1^{(2)} + \sigma_{2k}(a_2^{(2)} - \lambda_k) + \sigma_{3k}a_3^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{1k}a_1^{(3)} + \sigma_{2k}a_2^{(3)} + \sigma_{3k}(a_3^{(3)} - \lambda_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Пусть нумерация исходных уравнений (3.1) была такова, что

$$\left| \begin{array}{cc} a_1^{(1)} - \lambda_1 & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - \lambda_1 \end{array} \right| \neq 0, \quad \left| \begin{array}{cc} a_2^{(2)} - \lambda_2 & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \lambda_2 \end{array} \right| \neq 0. \quad (3.7)$$

Легко обнаружить, что такие два *различных* минора всегда найдутся. В самом деле, так как корни $D(x) = 0$ простые, то производная

$$D'_x(x) = \left| \begin{array}{cc} a_1^{(1)} - x & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1^{(1)} - x & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - x \end{array} \right| + \\ + \left| \begin{array}{cc} a_2^{(2)} - x & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x \end{array} \right|$$

отлична от нуля при значениях $x = \lambda_k$ ($k = 1, 2, 3$), т. е. для каждого из корней $x = \lambda_k$, по крайней мере, один из миноров отличен от нуля. Пусть при $x = \lambda_1$ первый минор отличен от нуля. Если окажется, что при $x = \lambda_2$ этот же

минор будет единственным отличным от нуля, то, значит, при $x = x_1$ были и другие миноры (кроме первого), отличные от нуля, так как второй и третий миноры не могут иметь одновременно корни x_1 и x_2 (ибо коэффициенты системы действительные).

Из системы (3.6) находим:

$$\sigma_{11} = \mu \begin{vmatrix} a_3^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2^{(2)} + p & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \sigma_{21} = -\mu \begin{vmatrix} a_1^{(1)} + p & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{31} = \mu \begin{vmatrix} a_1^{(1)} + p & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} + p \end{vmatrix} \neq 0,$$

где можно положить, например, $\mu = 1$. Точно так же:

$$\sigma_{12} = \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - i\sqrt{q} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - i\sqrt{q} \end{vmatrix}, \quad \sigma_{22} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - i\sqrt{q} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{32} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - i\sqrt{q} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Корню x_3 будут соответствовать: $\sigma_{13} = \bar{\sigma}_{12}$ (сопряженное σ_{12}) и т. д. Пусть

$$\sigma_{j1} = \alpha_{j1}, \quad \sigma_{j2} = \alpha_{j2} - i\alpha_{j3}, \quad \sigma_{j3} = \alpha_{j2} + i\alpha_{j3}.$$

Так как (3.5) образует систему линейно-независимых решений, то

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а следовательно, и

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В силу последнего условия решение системы (3.1):

$$\begin{aligned} x_j &= kx_j^{(1)} + h \text{ (действительная часть } x_j^{(2)}) = \\ &= \alpha_{j1} k e^{-pt} + h (\alpha_{j2} \cos \sqrt{q} t + \alpha_{j3} \sin \sqrt{q} t) \end{aligned}$$

может быть разрешено относительно:

$$k e^{-pt} = \xi_1, \quad h \cos \sqrt{q} t = \xi_2, \quad h \sin \sqrt{q} t = \xi_3,$$

где ξ_j рассматриваются как новые переменные.

Таким образом подстановки:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \alpha_{13} \xi_3, \\ x_2 &= \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2 + \alpha_{23} \xi_3, \\ x_3 &= \alpha_{31} \xi_1 + \alpha_{32} \xi_2 + \alpha_{33} \xi_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

приводят исходную систему (3.1) к виду (3.4).

Здесь:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2^{(2)} + p & a_3^{(2)} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_3^{(1)} & a_1^{(1)} + p \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}; \quad (3.9)$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} + p & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} + p \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_3^{(1)} & a_1^{(1)} \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_1^{(1)} \\ a_2^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \\ a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{13} = (a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) \sqrt{q}; \quad \alpha_{23} = -a_1^{(2)} \sqrt{q}; \quad \alpha_{33} = -a_1^{(3)} \sqrt{q}.$$

Если представить $P_j(x_1, x_2, x_3)$ в виде рядов по степеням x_1, x_2, x_3 :

$$\left. \begin{aligned} P_j(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}^{(j)} x_1^2 + a_{22}^{(j)} x_2^2 + a_{33}^{(j)} x_3^2 + 2a_{12}^{(j)} x_1 x_2 + \\ &+ 2a_{13}^{(j)} x_1 x_3 + 2a_{23}^{(j)} x_2 x_3 + a_{111}^{(j)} x_1^3 + a_{222}^{(j)} x_2^3 + a_{333}^{(j)} x_3^3 + \\ &+ 3a_{112}^{(j)} x_1^2 x_2 + 3a_{113}^{(j)} x_1^2 x_3 + 3a_{122}^{(j)} x_1 x_2^2 + 3a_{223}^{(j)} x_2^2 x_3 + \\ &+ 3a_{133}^{(j)} x_1 x_3^2 + 3a_{233}^{(j)} x_2 x_3^2 + 6a_{123}^{(j)} x_1 x_2 x_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

и, соответственно, правые части системы (3.4) в виде рядов по степеням ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$Q_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = A_{11}^{(j)} \xi_1^j + A_{22}^{(j)} \xi_2^j + A_{33}^{(j)} \xi_3^j + 2A_{12}^{(j)} \xi_1 \xi_2 + \\ + 2A_{13}^{(j)} \xi_1 \xi_3 + 2A_{23}^{(j)} \xi_2 \xi_3 + A_{111}^{(j)} \xi_1^3 + A_{222}^{(j)} \xi_2^3 + A_{333}^{(j)} \xi_3^3 + \\ + 3A_{112}^{(j)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{113}^{(j)} \xi_1^2 \xi_3 + 3A_{122}^{(j)} \xi_1 \xi_2^2 + 3A_{223}^{(j)} \xi_2^2 \xi_3 + \\ + 3A_{133}^{(j)} \xi_1 \xi_3^2 + 3A_{233}^{(j)} \xi_2 \xi_3^2 + 6A_{123}^{(j)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \dots,$$

то коэффициенты преобразованной системы будут выражаться через исходные по формулам:

$$A_{kl}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^3 \alpha'_{jp} [a_{11}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} + a_{22}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} + a_{33}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} + \\ + a_{12}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) + \\ + a_{13}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) + a_{23}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k})], \\ A_{kls}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^3 \alpha'_{jp} [a_{111}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{1s} + a_{222}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + \\ + a_{333}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s} + a_{112}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1k} \alpha_{1s} \alpha_{2l} + \\ + \alpha_{1l} \alpha_{1s} \alpha_{2k}) + a_{113}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1k} \alpha_{1s} \alpha_{3l} + \\ + \alpha_{1l} \alpha_{1s} \alpha_{3k}) + a_{233}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \\ + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + a_{122}^{(p)} (\alpha_{1s} \alpha_{2k} \alpha_{2l} + \alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + \\ + \alpha_{1l} \alpha_{2s} \alpha_{2k}) + a_{223}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \\ + \alpha_{2l} \alpha_{2s} \alpha_{3k}) + a_{133}^{(p)} (\alpha_{1s} \alpha_{3k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3s} \alpha_{3k} + \\ + \alpha_{1k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + a_{123}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{1l} \alpha_{2k} \alpha_{3s} + \\ + a_{1k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \alpha_{1s} \alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{2s} \alpha_{3k} + \alpha_{1s} \alpha_{2l} \alpha_{3k})], \quad (3.11)$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

и α'_{jp} — адьюнкта элемента α_{pj} , т. е. $\alpha'_{jp} = (-1)^{j+p} \cdot \Delta_1$, а Δ_1 — получается из Δ_0 вычеркиванием p -той строки и j -ого столбца.

Перейдем теперь в системе (3.4) к полярным координатам $\xi_2 = \rho \cos \varphi$, $\xi_3 = \rho \sin \varphi$ и исключим t ; тогда система (3.4) сведется к системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= \bar{R}(\rho, \varphi, \xi_1), \\ \frac{d\xi_1}{d\varphi} &= \bar{Z}(\rho, \varphi, \xi_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Следуя Ляпунову, разворачиваем правые части системы (3.12) по степеням ρ и ξ_1 , и будем искать ее решение в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + \dots, \\ \xi_1 &= v_1(\varphi)\rho_0 + v_2(\varphi)\rho_0^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Тогда, подставляя (3.13) в (3.12), для определения $u_j(\varphi)$ и $v_j(\varphi)$ получаем рекуррентные дифференциальные уравнения, из которых последовательно определяем функции $u_j(\varphi)$ и $v_j(\varphi)$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u_1(0) = 1, \quad u_j(0) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots), \quad v_j(0) = 0.$$

Полагая в построенном таким образом решении системы (3.12) $\varphi = 2\pi$, получаем:

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots, \quad \xi_1 = \beta_j \rho_0^j + \dots, \quad (3.14)$$

где

$$\alpha_j = u_j(2\pi), \quad \beta_j = v_j(2\pi).$$

Первый ляпуновский коэффициент $L(\lambda_0)$ совпадает с α_3 .

Вычисление дает для α_3 следующее выражение через коэффициенты преобразованной системы:

$$\left. \begin{aligned} L(\lambda_0) = \alpha_3 = \frac{\pi}{4q} & \left[2(A_{33}^{(2)}A_{33}^{(3)} - A_{23}^{(2)}A_{23}^{(3)}) + \right. \\ & + 2A_{23}^{(2)}(A_{22}^{(2)} + A_{33}^{(2)}) - 2A_{23}^{(3)}(A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(3)}) + \\ & + 3\sqrt{q}(A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{223}^{(3)})] + \\ & + \frac{\pi}{4p\sqrt{q}(p^2 + 4q)} \left\{ 2A_{22}^{(1)}(3A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) + \right. \\ & + 2A_{33}^{(1)}(A_{12}^{(2)} + 3A_{13}^{(3)}) + 4A_{23}^{(1)}(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + \\ & + 4p\sqrt{q}[(A_{22}^{(1)} - A_{33}^{(1)})(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + \\ & + 2A_{23}^{(1)}(A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)})] + \\ & \left. + 16q(A_{22}^{(1)} + A_{33}^{(1)})(A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

§ 2. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы (без приведения к каноническому виду)

Рассмотрим вспомогательную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 + a_3^{(1)}x_3 + \mu P_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_1^{(2)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + a_3^{(2)}x_3 + \mu P_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1^{(3)}x_1 + a_2^{(3)}x_2 + a_3^{(3)}x_3 + \mu P_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \right\} (3.16)$$

где μ — малый параметр. При $\mu = 1$ система (3.16) совпадает с (3.1).

Общее решение линейной системы, получаемой из (3.16) при $\mu = 0$ на границе $R = 0$, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k\alpha_{11}e^{-p(t+t_0)} + h[\alpha_{12}\cos\sqrt{q}(t+t_0) + \\ &\quad + \alpha_{13}\sin\sqrt{q}(t+t_0)], \\ x_2 &= k\alpha_{21}e^{-p(t+t_0)} + h[\alpha_{22}\cos\sqrt{q}(t+t_0) + \\ &\quad + \alpha_{23}\sin\sqrt{q}(t+t_0)], \\ x_3 &= k\alpha_{31}e^{-p(t+t_0)} + h[\alpha_{32}\cos\sqrt{q}(t+t_0) + \\ &\quad + \alpha_{33}\sin\sqrt{q}(t+t_0)], \end{aligned} \right\} (3.17)$$

где α_{jt} выражаются через коэффициенты системы (3.1) по формулам (3.9); k, h, t_0 — произвольные постоянные.

Семейство периодических решений линейной системы на границе $R = 0$ выделяется значением произвольного постоянного $k = 0$.

Поставим задачу выразить $L(\lambda_0)$ в виде интеграла, взятого по некоторой кривой C_{h_0} семейства периодических решений. Введем с этой целью в окрестности такой кривой C_{h_0} новую систему координат. Рассмотрим три семейства поверхностей (рис. 22):

$H(x_1, x_2, x_3) = h^2$ — представляющее семейство эллиптических цилиндров, вложенных один в другой и проходящих

через замкнутые кривые консервативной системы [получается из (3.17) исключением $ke^{-p(t+t_0)}$ и $t+t_0$].

$n(x_1, x_2, x_3, s) = 0$ — представляющее семейство плоскостей, проходящих через ось цилиндров H [получается из (3.17) исключением $ke^{-p(t+t_0)}$ и h и заменой $t+t_0$ через s].

$N(x_1, x_2, x_3, \eta) = 0$ — представляющее семейство плоскостей, параллельных основанию цилиндра, заполненному

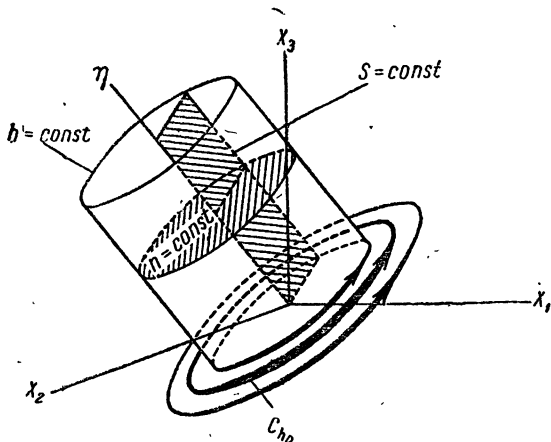


Рис. 22. Система координат h, s, η в окрестности кривой C_{h_0} .

замкнутыми траекториями [получается из (3.17) исключением $h \sin \sqrt{q}(t+t_0)$ и $h \cos \sqrt{q}(t+t_0)$ и заменой $ke^{-p(t+t_0)}$ через η].

Решение системы:

$$H = h^2, \quad n = 0, \quad N = 0$$

относительно переменных x_1, x_2, x_3 можно тогда представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(h, s, \eta) = \alpha_{11}\eta + h(\alpha_{12} \cos \sqrt{q}s + \alpha_{13} \sin \sqrt{q}s), \\ x_2 &= f_2(h, s, \eta) = \alpha_{21}\eta + h(\alpha_{22} \cos \sqrt{q}s + \alpha_{23} \sin \sqrt{q}s), \\ x_3 &= f_3(h, s, \eta) = \alpha_{31}\eta + h(\alpha_{32} \cos \sqrt{q}s + \alpha_{33} \sin \sqrt{q}s). \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Выделим теперь некоторую замкнутую кривую C_{h_0} и введем в окрестности этой кривой новую систему координат δ, s, η ($h = h_0 + \delta$). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f'_{1h} \frac{d\delta}{dt} + f'_{1s} \frac{ds}{dt} + f'_{1\eta} \frac{d\eta}{dt} = \\ &= a_1^{(1)} f_1 + a_2^{(1)} f_2 + a_3^{(1)} f_3 + \mu P_1(f_1, f_2, f_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= f'_{2h} \frac{d\delta}{dt} + f'_{2s} \frac{ds}{dt} + f'_{2\eta} \frac{d\eta}{dt} = \\ &= a_1^{(2)} f_1 + a_2^{(2)} f_2 + a_3^{(2)} f_3 + \mu P_2(f_1, f_2, f_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} &= f'_{3h} \frac{d\delta}{dt} + f'_{3s} \frac{ds}{dt} + f'_{3\eta} \frac{d\eta}{dt} = \\ &= a_1^{(3)} f_1 + a_2^{(3)} f_2 + a_3^{(3)} f_3 + \mu P_3(f_1, f_2, f_3). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1^{(1)} f_1 + a_2^{(1)} f_2 + a_3^{(1)} f_3 & f'_{1s} & f'_{1\eta} \\ a_1^{(2)} f_1 + a_2^{(2)} f_2 + a_3^{(2)} f_3 & f'_{2s} & f'_{2\eta} \\ a_1^{(3)} f_1 + a_2^{(3)} f_2 + a_3^{(3)} f_3 & f'_{3s} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} + \frac{\mu}{\Delta} \begin{vmatrix} P_1 & f'_{1s} & f'_{1\eta} \\ P_2 & f'_{2s} & f'_{2\eta} \\ P_3 & f'_{3s} & f'_{3\eta} \end{vmatrix},$$

или

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\mu}{\Delta} \begin{vmatrix} P_1 & f'_{1s} & f'_{1\eta} \\ P_2 & f'_{2s} & f'_{2\eta} \\ P_3 & f'_{3s} & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \quad (3.19)$$

так как в силу тождества $2H(f_1, f_2, f_3) = (h_0 + \delta)^2$ для $\mu = 0$ должно быть $\frac{d\delta}{dt} = 0$, то первый определитель необходимо должен обратиться в нуль.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{1h} & a_1^{(1)} f_1 + a_2^{(1)} f_2 + a_3^{(1)} f_3 & f'_{1\eta} \\ f'_{2h} & a_1^{(2)} f_1 + a_2^{(2)} f_2 + a_3^{(2)} f_3 & f'_{2\eta} \\ f'_{3h} & a_1^{(3)} f_1 + a_2^{(3)} f_2 + a_3^{(3)} f_3 & f'_{3\eta} \end{vmatrix} + \frac{\mu}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{1h} & P_1 & f'_{1\eta} \\ f'_{2h} & P_2 & f'_{2\eta} \\ f'_{3h} & P_3 & f'_{3\eta} \end{vmatrix},$$

или

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta} \Delta + \frac{\mu}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{1h} & P_1 & f'_{1\eta} \\ f'_{2h} & P_2 & f'_{2\eta} \\ f'_{3h} & P_3 & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \quad (3.20)$$

так как в силу соотношения $t + t_0 = s$ для $\mu = 0$ должно быть $\frac{ds}{dt} = 1$.

Далее:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1s} & a_1^{(1)}f_1 + a_2^{(1)}f_2 + a_3^{(1)}f_3 \\ f'_{2h} & f'_{2s} & a_1^{(2)}f_1 + a_2^{(2)}f_2 + a_3^{(2)}f_3 \\ f'_{3h} & f'_{3s} & a_1^{(3)}f_1 + a_2^{(3)}f_2 + a_3^{(3)}f_3 \end{vmatrix} + \frac{\mu}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1s} & P_1 \\ f'_{2h} & f'_{2s} & P_2 \\ f'_{3h} & f'_{3s} & P_3 \end{vmatrix},$$

или

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{\Delta} p\Delta\eta + \frac{\mu}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1s} & P_1 \\ f'_{2h} & f'_{2s} & P_2 \\ f'_{3h} & f'_{3s} & P_3 \end{vmatrix}, \quad (3.21)$$

так как в силу соотношения $\eta = ke^{-p(t+t_0)}$ для $\mu = 0$ должно быть $\frac{d\eta}{dt} = -p\eta$.

Исключая из (3.19), (3.20) и (3.21) время t , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\mu \left\{ P_1 \begin{vmatrix} f'_{2s} & f'_{2\eta} \\ f'_{2s} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} - P_2 \begin{vmatrix} f'_{1s} & f'_{1\eta} \\ f'_{2s} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} + P_3 \begin{vmatrix} f'_{1s} & f'_{1\eta} \\ f'_{2s} & f'_{2\eta} \end{vmatrix} \right\}}{\Delta - \mu \left\{ P_1 \begin{vmatrix} f'_{2h} & f'_{2\eta} \\ f'_{3h} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} - P_2 \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1\eta} \\ f'_{3h} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} + P_3 \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1\eta} \\ f'_{2h} & f'_{2\eta} \end{vmatrix} \right\}} = \\ &= R(\delta, s, h, \mu) \\ \frac{d\eta}{ds} &= \frac{-p\Delta\eta + \mu \left\{ P_1 \begin{vmatrix} f'_{2h} & f'_{2s} \\ f'_{3h} & f'_{3s} \end{vmatrix} - P_2 \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1s} \\ f'_{3h} & f'_{3s} \end{vmatrix} + P_3 \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1s} \\ f'_{2h} & f'_{2s} \end{vmatrix} \right\}}{\Delta - \mu \left\{ P_1 \begin{vmatrix} f'_{2h} & f'_{2\eta} \\ f'_{3h} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} - P_2 \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1\eta} \\ f'_{3h} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} + P_3 \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1\eta} \\ f'_{2h} & f'_{2\eta} \end{vmatrix} \right\}} = \\ &= S(\delta, s, \eta, \mu). \end{aligned} \right\} (3.22)$$

Здесь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{1s} & f'_{1\eta} \\ f'_{2h} & f'_{2s} & f'_{2\eta} \\ f'_{3h} & f'_{3s} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} = h\sqrt{q} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = h\Delta_0\sqrt{q}. \quad (3.23)$$

Развертываем (3.22) в ряды по степеням δ , η , μ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= R'_\mu \cdot \mu + \frac{1}{2} R''_{\mu^2} \cdot \mu^2 + R''_{\delta\mu} \cdot \delta\mu + R''_{\mu\eta} \cdot \mu\eta + \dots, \\ \frac{d\eta}{ds} &= S'_\eta \cdot \eta + S'_\mu \cdot \mu + \frac{1}{2} S''_{\mu^2} \mu^2 + \\ &\quad + S''_{\delta\mu} \cdot \delta\mu + S''_{\eta\mu} \cdot \eta\mu + \dots \end{aligned} \right\} (3.24)$$

и ищем решение (3.24) в виде рядов по степеням μ и начальных значений δ_0 , η_0 :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= C_{100}\delta_0 + C_{010}\eta_0 + C_{001}\mu + C_{200}\delta_0^2 + C_{020}\eta_0^2 + \\ &\quad + C_{002}\mu^2 + C_{110}\delta_0\eta_0 + C_{101}\delta_0\mu + C_{011}\eta_0\mu + \dots, \\ \eta &= D_{100}\delta_0 + D_{010}\eta_0 + D_{001}\mu + D_{200}\delta_0^2 + D_{020}\eta_0^2 + \\ &\quad + D_{002}\mu^2 + D_{110}\delta_0\eta_0 + D_{101}\delta_0\mu + D_{011}\eta_0\mu + \dots \end{aligned} \right\} (3.25)$$

с начальными условиями

$$C_{100}(0) = D_{010}(0) = 1, \quad C_{jlk}(0) = 0 \quad (j, l, k \neq 1, 0, 0), \\ D_{jlk}(0) = 0 \quad (j, l, k \neq 0, 1, 0).$$

Подставляя (3.25) в (3.24) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ_0 , η_0 , μ , получаем рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_{100} &= 0, \quad \dot{C}_{010} = 0, \quad \dot{C}_{001} = R'_\mu, \quad \dot{C}_{200} = 0, \quad \dot{C}_{020} = 0, \\ \dot{C}_{002} &= \frac{1}{2} R''_{\mu^2} + C_{001} R''_{\delta\mu} + D_{001} R''_{\eta\mu}, \\ \dot{D}_{100} &= S'_\eta D_{100}, \quad \dot{D}_{010} = S'_\eta D_{010}, \quad \dot{D}_{001} = S'_\eta D_{001} + S'_\mu, \end{aligned} \right\} (3.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R'_\mu(0, s, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 \sqrt{q}} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \\ R''_{\mu^2}(0, s, 0, 0) &= \frac{2}{h_0^2 \Delta_0^2 q} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} (3.27)$$

$$\begin{aligned}
 R''_{\mu} (0, s, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 \sqrt{q}} \cdot \frac{d}{dh} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} - \\
 &\quad - \frac{1}{h_0^2 \Delta_0 \sqrt{q}} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{2s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \\
 R''_{\eta} (0, s, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 \sqrt{q}} \begin{vmatrix} P'_{1\eta} & P'_{2\eta} & P'_{3\eta} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \\
 S'_{\mu} (0, s, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 \sqrt{q}} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix}, \\
 \bar{S}'_{\eta} (0, s, 0, 0) &= -p.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Заметим, что можно также написать:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dh} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} &= \frac{d}{ds} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P'_{1\eta} & P'_{2\eta} & P'_{3\eta} \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \end{vmatrix} + \\
 &+ \Delta (P'_{1x_1} + P'_{2x_2} + P'_{3x_3}).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Это замечание мы в дальнейшем используем.

Из (3.26), принимая во внимание начальные условия, получаем:

$$\begin{aligned}
 C_{100} &= 1, \\
 C_{010} &= C_{200} = C_{020} = D_{100} = 0, \\
 D_{010} &= e^{-ps},
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_{001} &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 \sqrt{q}} e^{-ps} \int_0^s e^{p\xi} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \end{vmatrix} d\xi, \\
 C_{001} &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 \sqrt{q}} \int_0^s \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} d\xi, \\
 C_{002} &= \int_0^s \left\{ \frac{1}{2} R''_{\mu s} + C_{001} R''_{\delta \mu} + D_{001} R''_{\eta \mu} \right\} d\xi.
 \end{aligned} \right\} (3.29)$$

Полагая в (3.25) $s = \tau$, где $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{q}}$ — период на кривой C_{h_0} , получаем „функцию соответствия“:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta &= \delta_0 + C_{001}(\tau) \mu + C_{002}(\tau) \mu^2 + C_{101}(\tau) \delta_0 \mu + \\
 &\quad + C_{011}(\tau) \eta_0 \mu + \dots, \\
 \eta &= \eta_0 e^{-p\tau} + D_{001}(\tau) \mu + \dots,
 \end{aligned} \right\} (3.30)$$

дающую в окрестности точки $(0, 0)$ преобразование плоскости (δ_0, η_0) в плоскость (δ, η) .

Обратимся теперь к равенствам (3.14), из которых определено α_s , и заметим, что геометрический смысл этих равенств заключается в преобразовании в окрестности точки $\rho = 0$ прямой $\xi_1 = 0$, лежащей в плоскости $\varphi = 0$ (т. е. $\xi_3 = 0$), в некоторую кривую $F(\rho, \xi_1) = 0$, находящуюся в той же плоскости. Если положить в равенствах (3.30) $\eta_0 = 0$, то мы точно так же получим из (3.30) вместо преобразования плоскости в плоскость преобразование в окрестности точки $\delta_0 = 0$ прямой $\eta_0 = 0$, лежащей в плоскости $s = 0$, в некоторую кривую $F_1(\delta, \eta) = 0$, находящуюся в той же плоскости. Из равенств (3.14) и (3.30) совместно с соотношениями $\xi_2 = \rho \cos \varphi$, $\xi_3 = \rho \sin \varphi$ находим, что прямые $\xi_1 = \varphi = 0$ и $\eta = s = 0$ совпадают и что $\rho = h$. Выбирая теперь такие h_0 , чтобы кривая C_{h_0} целиком находилась внутри области сходимости (3.14), находим связь между ρ и δ :

$$\rho = h_0 + \delta, \quad (3.31)$$

т. е.

$$\rho - \rho_0 = \delta - \delta_0. \quad (3.32)$$

Представив правые части выражений для ρ и δ в (3.14) и (3.30) в виде рядов по μ , h_0 и δ_0 [введение μ в (3.14) соответствует опять вычислению α_3 для системы (3.16)] и, воспользовавшись равенством (3.32), выражаем α_3 через C_{001} и C_{002} .

Имеем:

$$(A_1\mu + A_2\mu^2)(h_0 + \delta_0)^3 + \dots = C_{001}(\tau)\mu + C_{002}(\tau)\mu^2 + \dots,$$

или:

$$\begin{aligned} A_1\mu h_0^3 + A_2\mu^2 h_0^3 + \dots &= \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{001} \right)_{h_0=0} \mu h_0^3 + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{002} \right)_{h_0=0} \mu^2 h_0^3 + \dots, \end{aligned}$$

откуда:

$$L(\lambda_0) = \alpha_3 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \left\{ C_{001}(\tau) + C_{002}(\tau) \right\} \right]_{h_0=0}$$

Выражение для $C_{001}(\tau)$ и $C_{002}(\tau)$ получим из (3.29), полагая $s = \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{q}}$. Соотношение (3.28) позволяет при этом значительно упростить $C_{002}(\tau)$, выделив из $C_{002}(s)$ периодическую часть, обращаящуюся в нуль при интегрировании от 0 до τ , тогда α_3 будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) = \alpha_3 &= \frac{1}{3! \Delta_0 \sqrt{q}} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}} \begin{vmatrix} P_{1s} & P_{2s} & P_{3s} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} ds \right]_{h_0=0} + \\ &+ \frac{1}{3! \Delta_0^2 q} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}} \left\{ e^{-ps} \begin{vmatrix} P'_{1\eta} & P'_{2\eta} & P'_{3\eta} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{vmatrix} \right\} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \int_0^s e^{p\xi} \times \left[\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \end{array} \right] d\xi + \left(\Delta_0 \sqrt{q} h_0 (P'_{1x_1} + P'_{2x_2} + P'_{3x_3}) - \right. \\ \left. - \left[\begin{array}{ccc} P'_{1\eta} & P'_{2\eta} & P'_{3\eta} \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \end{array} \right] \int_0^s \left[\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} \\ f'_{1\eta} & f'_{2\eta} & f'_{3\eta} \end{array} \right] d\xi \right) ds \Big]_{h=0} \quad (3.33)$$

Здесь всюду в P_j и $P'_{j\eta} = \alpha_{11} P'_{jx_1} + \alpha_{21} P'_{jx_2} + \alpha_{31} P'_{jx_3}$ вместо x_j нужно подставить уравнения кривой C_{h_0} :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = h_0 (\alpha_{12} \cos \sqrt{q} s + \alpha_{13} \sin \sqrt{q} s), \\ x_2 = h_0 (\alpha_{22} \cos \sqrt{q} s + \alpha_{23} \sin \sqrt{q} s), \\ x_3 = h_0 (\alpha_{32} \cos \sqrt{q} s + \alpha_{33} \sin \sqrt{q} s). \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

Значения Δ_0 , α_{ij} и q даются в (3.23), (3.9) и (3.3).

Примечание 1. Заметим, что здесь так же, как и в случае системы двух уравнений, использование консервативных кривых является лишь специальным приемом и не предполагает близости исходной системы (3.1) к использованной консервативной.

Примечание 2. Первое слагаемое в выражении (3.33) отлично от нуля только для членов *третьего* порядка в разложениях P_j , а второе — только для членов *второго* порядка в тех же разложениях. Для рассматриваемого случая справедливо все сказанное в примечании 2 главы II.

§ 3. Выражение для $l(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы

Пусть для системы (3.1) выполняются условия:

$$r = - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} = 0, \\ q = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

Для определенности пусть $|a_j^i| \neq 0$; ($i, j = 1, 2$) и

$$p = -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) > 0.$$

Ищем решение линейной системы в виде:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0.$$

Для определения α , β и γ получаем систему:

$$\alpha a_1^{(1)} + \beta a_1^{(2)} + \gamma a_1^{(3)} = 0,$$

$$\alpha a_2^{(1)} + \beta a_2^{(2)} + \gamma a_2^{(3)} = 0,$$

откуда находим:

$$\alpha = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1^{(3)} & a_1^{(1)} \\ a_2^{(3)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.36)$$

Вводим вместо x_3 новое переменное

$$z = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3.$$

Тогда система (3.1) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left(a_1^{(1)} - \frac{\alpha}{\gamma} a_3^{(1)} \right) x_1 + \left(a_2^{(1)} - \frac{\beta}{\gamma} a_3^{(1)} \right) x_2 + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} a_3^{(1)} z + \dots = X_1(x_1, x_2, z), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left(a_1^{(2)} - \frac{\alpha}{\gamma} a_3^{(2)} \right) x_1 + \left(a_2^{(2)} - \frac{\beta}{\gamma} a_3^{(2)} \right) x_2 + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} a_3^{(2)} z + \dots = X_2(x_1, x_2, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha P_{12} + \beta P_{22} + \gamma P_{32} + \dots = Z(x_1, x_2, z), \end{aligned} \right\} (3.37)$$

где P_{j2} — члены второго порядка в разложениях правых частей системы (3.1), в развернутом виде представленные в (3.10).

Искомая постоянная $l(\lambda_0)$ может быть определена, согласно Ляпунову, как коэффициент при z^2 в разложении $Z(x_1, x_2, z)$, где x_1 и x_2 определяются как функции z из системы $X_1 = 0$, $X_2 = 0$. При этом, в силу предположения, что характери-

ческое уравнение (3.2) имеет только один равный нулю корень, а остальные с отрицательными действительными частями, система $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ определяет x_1 и x_2 как голоморфные функции z^* .

Пусть

$$x_1 = \sigma_1 z + \dots, \quad x_2 = \sigma_2 z + \dots$$

Для σ_1 и σ_2 находим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{\Delta} (a_3^{(1)} a_2^{(2)} - a_2^{(1)} a_3^{(2)}), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\Delta} (a_3^{(1)} a_1^{(2)} - a_3^{(2)} a_1^{(1)}), \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (3.38)$$

Отсюда для $l(\lambda_0)$ получаем выражение:

$$\begin{aligned} l(\lambda_0) &= \alpha \left[a_{11}^{(1)} \sigma_1^2 + a_{22}^{(1)} \sigma_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} a_{33}^{(1)} (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 - 1)^2 + \right. \\ &+ 2a_{12}^{(1)} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{2}{\gamma} a_{13}^{(1)} \sigma_1 (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 - 1) - \frac{2}{\gamma} a_{23}^{(1)} \sigma_2 (\alpha \sigma_1 + \\ &\left. + \beta \sigma_2 - 1) \right] + \beta [\dots]^{(2)} + \gamma [\dots]^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Выражения в двух последних квадратных скобках отличаются от выражения в первой скобке только верхним индексом коэффициентов a_{ji} ; значения α , β , γ , σ_1 и σ_2 даны в (3.36) и (3.38).

Примечание. Заметим, что при использовании выражения (3.39) необходимо выбирать такую нумерацию уравнений (3.1), чтобы выполнялось условие:

$$\|a_j^{(i)}\| \neq 0 \quad (j, i = 1, 2).$$

§ 4. Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при переходе через границу области Раута — Гурвица

Мы получим наглядную картину поведения динамической системы вблизи границ, определяемых условиями Раута — Гурвица, если рассмотрим изменение качественной структуры

* Ляпунов, стр. 125.

в окрестности состояния равновесия. При переходе через границу $R = 0$ возможны следующие случаи:

I. $L(\lambda_0)$ на границе $R = 0$ отрицательно.

При переходе через границу $R = 0$ от положительных значений к отрицательным (на границе $R = 0$: $\frac{dR}{d\lambda} < 0$, если рассматривать R в зависимости от параметра λ) появляется единственный *устойчивый* предельный цикл. При обратном изменении параметра, *устойчивый* предельный цикл стягивается в точку.

II. $L(\lambda_0)$ на границе $R = 0$ положительно.

При переходе через границу $R = 0$ от положительных значений к отрицательным к состоянию равновесия стягивается единственный *неустойчивый* предельный цикл. При обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется *неустойчивый* предельный цикл.

Качественная структура разбиения окрестности состояния равновесия на траектории изображена на рис. 23 и 24.

Качественная структура разбиения на траектории поверхности, проходящей через предельный цикл и состояние равновесия, тождественна с соответствующими структурами разбиения на траектории для плоского случая. Остальные траектории, за исключением двух, образующих вместе с состоянием равновесия одну аналитическую кривую, имеют вид спиралей. В первом случае ($L(\lambda_0) < 0$) все спирали накручиваются либо на состояние равновесия ($R > 0$), либо на *устойчивый* предельный цикл ($R < 0$). Во втором случае ($L(\lambda_0) > 0$) существует интегральная поверхность, проходящая через предельный цикл и заполненная спиралью, накручивающимися на предельный цикл. Остальные спирали либо накручиваются на состояние равновесия (спирали *внутри* поверхности, проходящей через предельный цикл), либо удаляются от состояния равновесия (спирали *вне* поверхности, проходящей через предельный цикл).

Рисунки 23 и 24 наглядно показывают различие в поведении системы (3.1) по отношению к случайным толчкам вблизи границы $R = 0$ в зависимости от знака $L(\lambda_0)$ и выполнения условия устойчивости ($R > 0$).

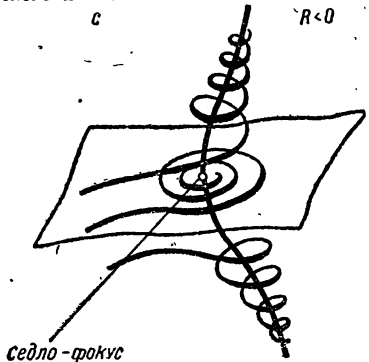
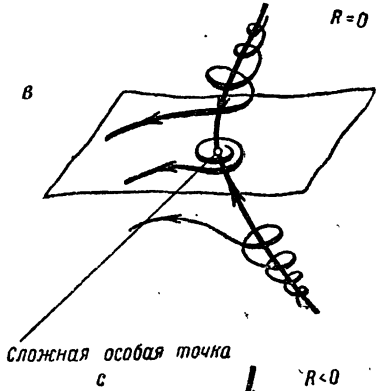
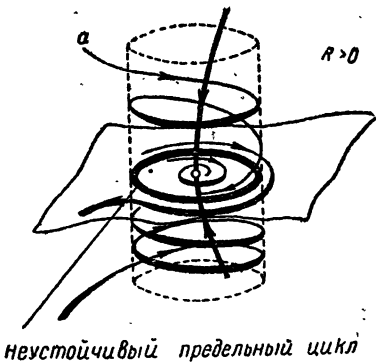
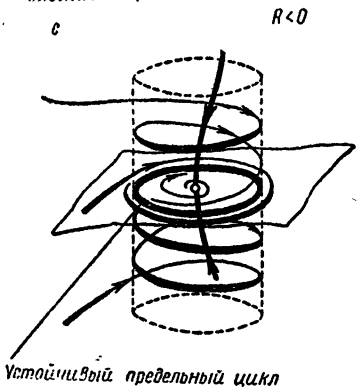
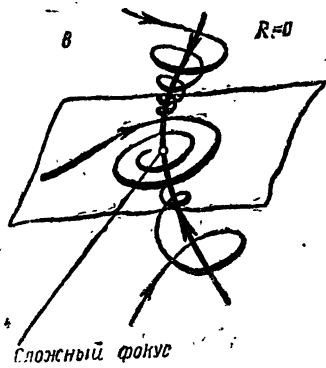
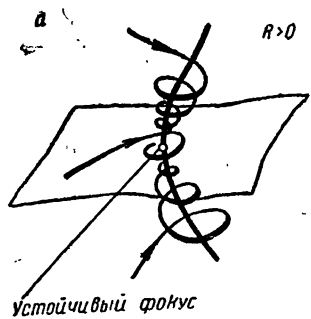


Рис. 23. Случай $L < 0$. Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при изменении знака R .

Рис. 24. Случай $L > 0$. Смена качественных структур в окрестности состояния равновесия при изменении знака R .

В случае $L > 0$, $R > 0$ (рис. 24а) возможно „выбивание“ случайным толчком изображающей точки из устойчивого состояния равновесия за границу области устойчивости; в случае же $L < 0$, $R > 0$ (рис. 23а) такое выбивание невозможно.

Переход через границу $R = 0$ в первом случае ($L(\lambda_0) < 0$, $\frac{dR}{d\lambda} < 0$) соответствует появлению устойчивого предельного цикла, который будет служить элементом притяжения для всех траекторий (кроме одной, проходящей через состояние равновесия с определенным направлением касательной) и при этом оставаться сколь угодно малым при достаточно малых нарушениях условия устойчивости $R > 0$.

При обратном изменении параметра изображающая точка возвращается в состояние равновесия: система ведет себя *обратно* по отношению к изменению параметра.

Переход через границу $R = 0$ во втором случае ($L(\lambda_0) > 0$, $\frac{dR}{d\lambda} < 0$) соответствует стягиванию неустойчивого предельного цикла и исчезновению области устойчивости (внутри трубкообразной поверхности, проходящей через предельный цикл). Изображающая точка при этом „срывается“ с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой его окрестности.

При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия: система ведет себя *необратно*.

Обратимся к границе $r = 0$. Состояния равновесия системы

$$\dot{\xi}_j = P_j^* \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.40)$$

определяются из условий $P_1^* = P_2^* = P_3^* = 0$. Если характеристическое уравнение системы (3.40) не имеет равного нулю корня, то поверхности $P_j = 0$ пересекаются в состоянии равновесия *без касания*. Обращение в нуль одного корня характеристического уравнения совместно с условием $l(\lambda_0) \neq 0$ указывает, как легко показать, на то, что линия пересечения двух из поверхностей $P_j = 0$ имеет с третьей поверхностью касание первого порядка и, следовательно, состояние

равновесия можно рассматривать как *двойную* особую точку. Легко проверить, что, при соответствующем введении параметра в систему (3.40), это состояние равновесия может либо совсем исчезнуть¹, либо расщепиться на два *простых* состояния равновесия (с характеристическими уравнениями, не имеющими ни нулевых корней, ни корней с равной нулю действительной частью); одно из них будет иметь положительный, а другое отрицательный корень характеристического уравнения. Два других корня могут быть и действительными и комплексными.

Возможные случаи разбиения на траектории малой окрестности состояния равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, вблизи границы $r = 0$, изображены на рис. 25 и 26. При выполнении условий $r = 0$, $l(\lambda_0) \neq 0$ в начале координат обе точки сливаются в сложную особую точку (рис. 25b и 26b).

¹ Критерий для суждения о возможности исчезновения состояния равновесия при определенном введении параметра совершенно аналогичен подобному критерию для системы двух уравнений. Вопрос и здесь решается обращением или необращением в нуль в точке, соответствующей рассматриваемому состоянию равновесия некоторого определителя, например, определителя:

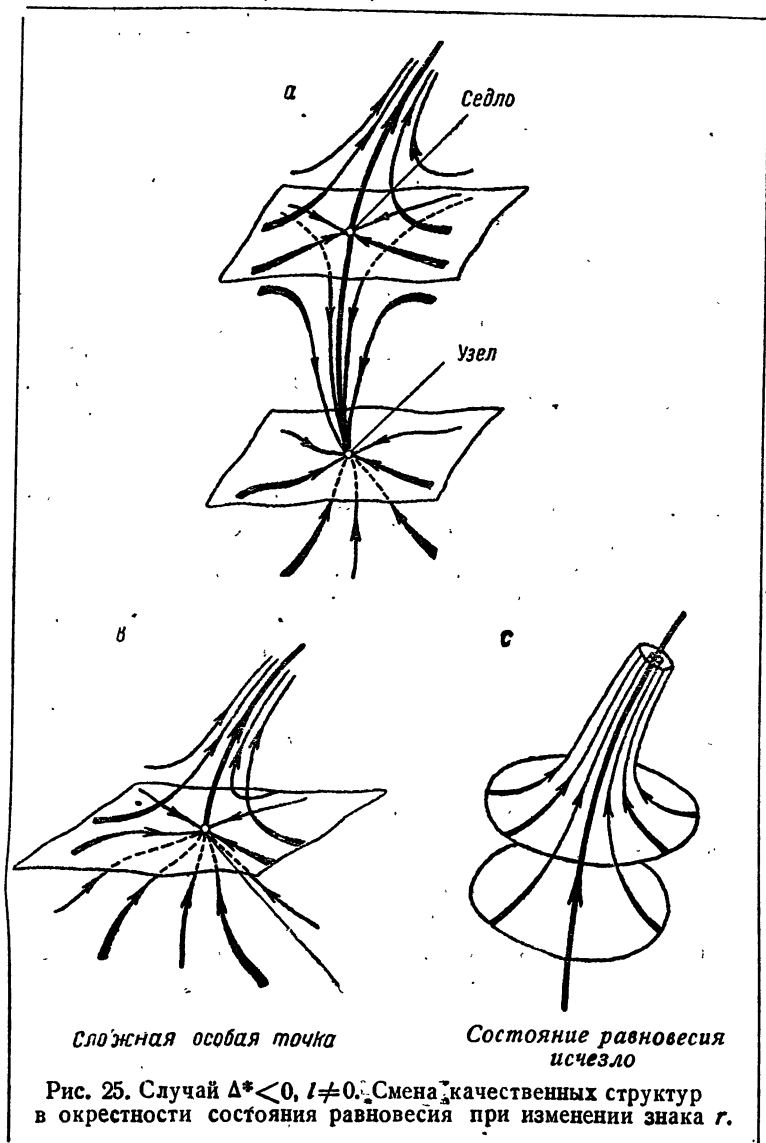
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} P_{1\lambda}^{*'} & P_{1x_2}^{*'} & P_{1x_3}^{*'} \\ P_{2\lambda}^{*'} & P_{2x_2}^{*'} & P_{2x_3}^{*'} \\ P_{3\lambda}^{*'} & P_{3x_2}^{*'} & P_{3x_3}^{*'} \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

при значениях $\xi_1 = \xi_1^*$, $\xi_2 = \xi_2^*$, $\xi_3 = \xi_3^*$, $\lambda = \lambda_0$, где ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^* — состояние равновесия системы:

$$\xi_j = P_j^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda_0),$$

определяемое из уравнений $P_j^* = 0$, а λ_0 определяется из условия:

$$r(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \lambda) \equiv - \begin{vmatrix} P_{1x_1}^{*'} & P_{1x_2}^{*'} & P_{1x_3}^{*'} \\ P_{2x_1}^{*'} & P_{2x_2}^{*'} & P_{2x_3}^{*'} \\ P_{3x_1}^{*'} & P_{3x_2}^{*'} & P_{3x_3}^{*'} \end{vmatrix} = 0.$$



Дополнительным условием к условию (3.35), позволяющим различить случаи, изображенные на рис. 25b и рис. 26b, является знак выражения

$$\Delta^* = -p^2q^2 + 4q^3. \quad (3.42)$$

Для состояния равновесия типа „пространственное седло—узел“ $\Delta^* < 0$, для состояния равновесия типа „пространственное седло—фокус“ $\Delta^* > 0$.

Поверхность, отделяющая в пространстве p, q, r область действительных корней от области, где уравнение имеет комплексные корни, изображена на рис. 21 внутри области $R > 0$.

Для системы (3.1) при выполнении условия $l(\lambda_0)_i \neq 0$,

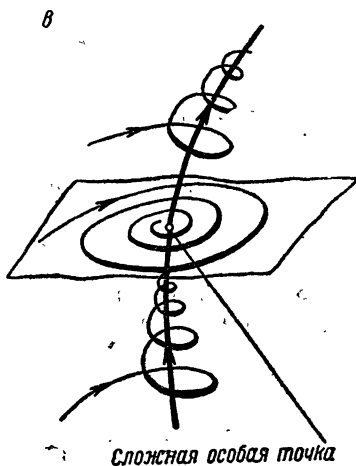
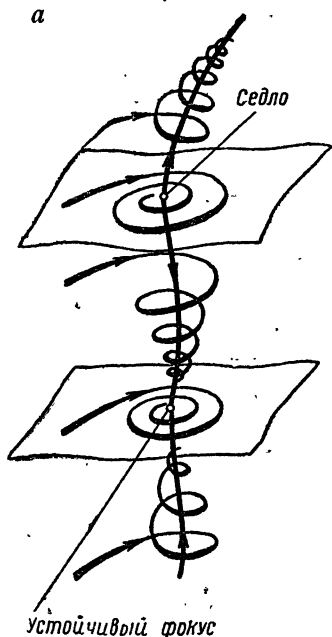


Рис. 26. Случай $\Delta^* > 0, l \neq 0$.

на границе $r = 0$, при приближении к границе возрастает опасность быть выброшенной случайным толчком из устойчивого состояния равновесия в область неустойчивости.

§ 5. Примеры

1. Сложный генератор с вырожденным вторым контуром

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 27. Уравнения для токов в контурах напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt &= N \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_a}{dt}, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 &= N \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} (3.43)$$

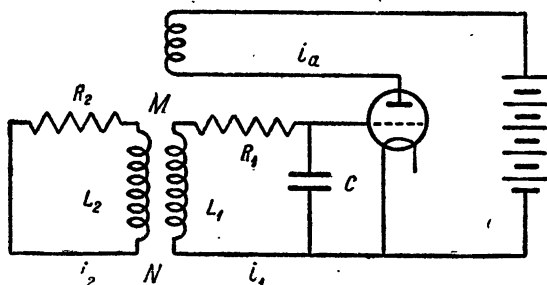


Рис. 27. Сложный генератор с вырожденным вторым контуром.

Характеристику лампы примем в виде:

$$i_a = S V_1 \left(1 - \frac{V_1^2}{3V_s^2} \right),$$

где \$S\$ („крутизна в нулевой точке“) и \$V_s\$ („напряжение насыщения“) — константы, а

$$V_1 = \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt.$$

Так как \$C \dot{V}_1 = i_1\$, \$C \ddot{V}_1 = \frac{di_1}{dt}\$, то система (3.43) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \ddot{V}_1 + R_1 \dot{V}_1 + \frac{1}{C} V_1 &= \frac{N}{C} \frac{di_2}{dt} + \frac{MS}{C} \left(1 - \frac{V_1^2}{V_s^2} \right) \dot{V}_1, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 &= N C \ddot{V}_1. \end{aligned} \right\} (3.44)$$

Предположим, что первый генератор парциально само-возбужден, т. е. что $MS > R_1 C$, и введем безразмерные переменные:

$$x = \frac{V_1}{V_8} \sqrt{\frac{MS}{MS - R_1 C}}, \quad y = \frac{i_2 L_2 \omega_0}{V_8} \sqrt{\frac{MS}{MS - R_1 C}},$$

$$\tau = \omega_0 t \quad \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} \right).$$

Система (3.44) примет тогда вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x &= x_2 \frac{dy}{d\tau} + \mu (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{dy}{d\tau} + \rho \mu y &= x_1 \frac{d^2 x}{d\tau^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

где

$$\mu = \omega_0 (MS - R_1 C), \quad \rho = \frac{R_2}{L_2 \omega_0^2 (MS - R_1 C)},$$

$$x_1 = \frac{N_1}{L_1}, \quad x_2 = \frac{N}{L_2}$$

безразмерные параметры.

Систему (3.45) можно также представить в виде одного уравнения третьего порядка:

$$\sigma \ddot{x} + \mu (\rho - 1) \dot{x} + (1 - \rho \mu^2) \dot{x} + \rho \mu x =$$

$$= -2\mu x \dot{x}^2 - \mu^2 \rho x^2 \dot{x} \quad (\sigma = 1 - x_1 x_2),$$

или, окончательно, в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho x_1 - q x_2 - r x_3 - \frac{2\mu}{\sigma} x_2^2 x_3 - \frac{\mu^2 \rho}{\sigma} x_2 x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

где

$$x_1 = \ddot{x}, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = x,$$

$$\rho = \frac{\mu (\rho - 1)}{\sigma}, \quad q = \frac{1 - \rho \mu^2}{\sigma}, \quad r = \frac{\rho \mu}{\sigma}.$$

Система (3.46) содержит три независимых параметра μ , ρ , σ .

Условия Раута — Гурвица дают для системы (3.46) неравенства:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad R = pq - r > 0.$$

Легко проверить, что нумерация переменных в системе (3.46) такова, что условия (3.7) выполняются.

В самом деле:

$$\begin{vmatrix} 0 & -q \\ 1 & p \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -i\sqrt{q} & 0 \\ 1 & -i\sqrt{q} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычислим знак $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$. Так как система (3.46) не имеет членов второго порядка, то для $L(\lambda_0)$ из (3.15) получаем выражение:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4\sqrt{q}} A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{223}^{(3)},$$

где

$$A_{kls}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \left[a_{223}^{(1)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \right. \\ \left. + a_{233}^{(1)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) \right] \alpha'_{j1}. \quad (3.47)$$

Для α_{jt} из (3.9) и (3.46) находим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} = pr, \quad \alpha_{21} = -r, \quad \alpha_{31} = q, \quad \alpha_{12} = -q, \quad \alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{32} = 1, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{23} = -\sqrt{q}, \quad \alpha_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Из (3.47), принимая во внимание, что $a_{223}^{(1)} = -\frac{2\mu}{3\sigma}$ и $a_{233}^{(1)} = -\frac{\mu^2\rho}{3\sigma}$, находим:

$$A_{222}^{(2)} = 0, \quad A_{333}^{(3)} = 0, \quad A_{233}^{(2)} = -\frac{\alpha'_{21}}{\Delta_0} \cdot \frac{2\mu q}{3\sigma}, \quad A_{223}^{(3)} = \frac{\alpha'_{31}}{\Delta_0} \cdot \frac{\mu^2\rho \cdot \sqrt{q}}{3\sigma},$$

где

$$\alpha'_{21} = -q\sqrt{q}, \quad \alpha'_{31} = -r, \quad \Delta_0 = \sqrt{q}(q^2 + pr) > 0.$$

Таким образом, для $L(\lambda_0)$ окончательно получим:

$$L(\lambda_0) = \frac{\mu\pi}{4\sigma^3\Delta_0} (2q^2 - \mu r\rho) = \frac{\mu\pi}{4\sigma^3\Delta_0} [2(1 - \rho\mu^2)^2 - \mu^2\rho^2\sigma].$$

Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках. На рис. 28 в плоскости параметров ρ , σ при фиксированном μ изображена область устойчивости (покрыта штриховкой) и кривая $L(\lambda_0)$. Точка пересечения кривой $L(\lambda_0) = 0$ с кривой $R = 0$ отделяет на последней „опасную“ часть границы $R = 0$ [$L(\lambda_0) > 0$] от „безопасной“ [$L(\lambda_0) < 0$].

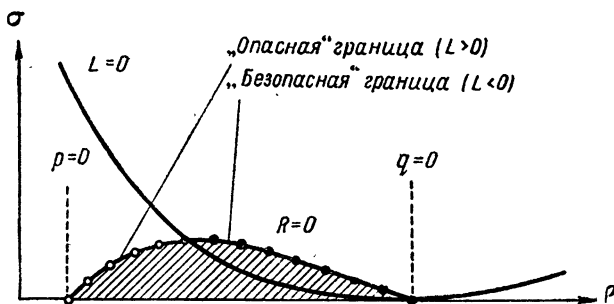


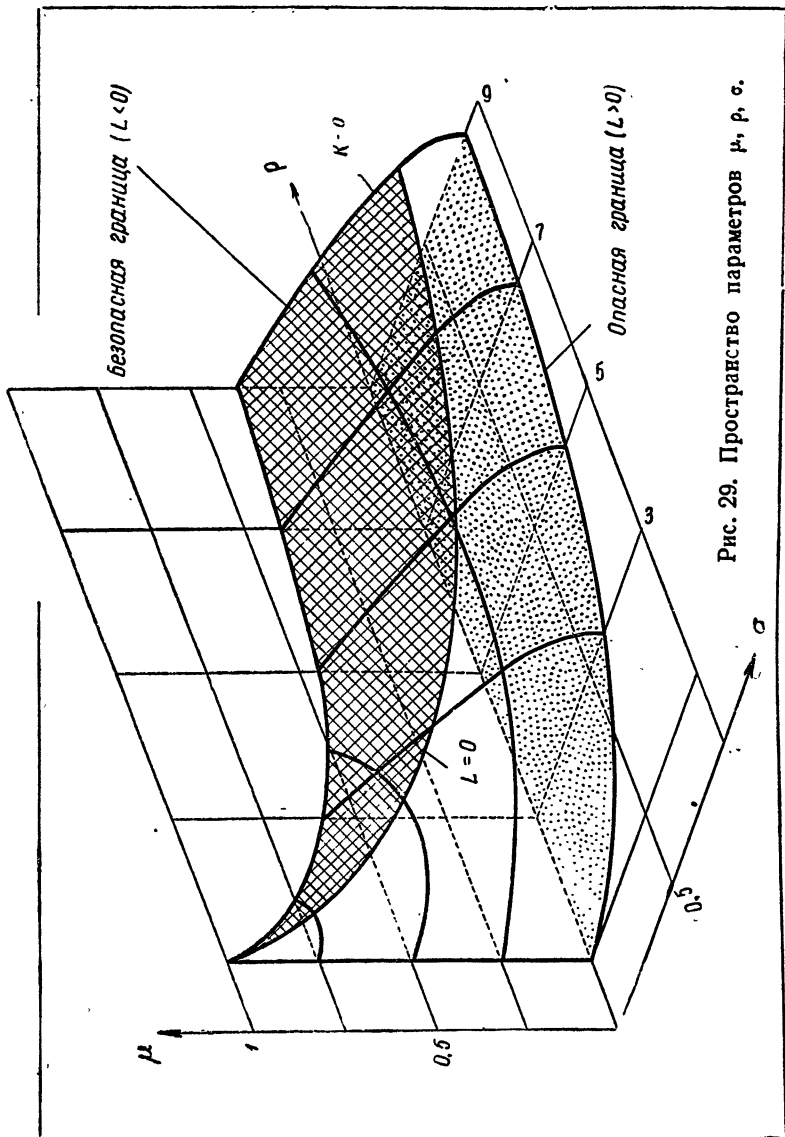
Рис. 28. Сечение пространства параметров плоскостью $\mu = \text{const.}$

Если при фиксированном σ изменять ρ , переходя через границу области устойчивости, то в первом случае происходит срыв изображающей точки с состояния равновесия, а во втором — мягкое возникновение автоколебаний. На рис. 29 изображена граница области устойчивости в полном пространстве параметров задачи ρ , μ , σ . Область устойчивости заключена между плоскостью $\mu = 0$ и поверхностью. „Безопасная“ часть границы $R = 0$ покрыта штриховкой.

2. Стабилизация курса самолета автопилотом

Уравнения движения системы „самолет с автопилотом“ при обычных упрощающих предположениях, как известно, могут быть записаны в виде [27, 28, 29]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} + k\varphi &= -N\eta, \\ \eta &= F(\psi), \\ \dot{\psi} &= \varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta. \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Рис. 29. Пространство параметров μ , ρ , σ .

Здесь φ — угол рыскания самолета, η — угол поворота руля, $M > 0$ и $N > 0$ — константы, характеризующие соответственно естественное демпфирование самолета и рулевое устройство, k — коэффициент, характеризующий статическую устойчивость самолета, ψ — аргумент сервомотора, управляющего рулем*, $\beta > 0$ — так называемый коэффициент искусственного демпфирования, $\frac{1}{a}$ — так называемый коэффициент обратной связи, $F(\psi)$ — характеристика сервомотора.

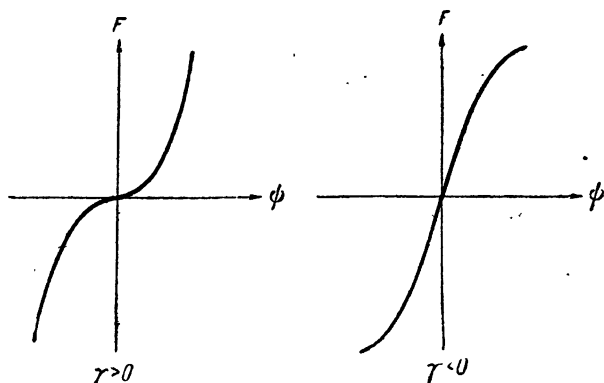


Рис. 30. Характеристика $F(\psi)$.

Характеристику сервомотора (рис. 30), симметричную относительно начала координат, аппроксимируем в окрестности начала полиномом, содержащим только нечетные степени ψ :

$$F(\psi) = \alpha\psi + \gamma\psi^3.$$

Исключая теперь из системы (3.49) координаты η и ψ , получаем:

$$\ddot{\varphi} + p\dot{\varphi} + q\varphi + r\varphi = -S_0(S_1\ddot{\varphi} + S_2\dot{\varphi} + S_3\varphi)^3, \quad (3.50)$$

* Механический смысл ψ в случае гидравлического сервомотора — открытие золотника.

где

$$\left. \begin{aligned} p &= M + \frac{\alpha}{a}, \quad q = k + \alpha \left(\beta N + \frac{M}{a} \right), \\ r &= \alpha \left(N + \frac{k}{a} \right), \\ S_0 &= \gamma N, \quad S_1 = \frac{1}{Na}, \quad S_2 = \beta + \frac{M}{Na}, \\ S_3 &= 1 + \frac{k}{Na}. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Вводя обозначения

$$x_1 = \ddot{\varphi}, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad x_3 = \varphi$$

и раскрывая скобку, запишем (3.50) в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -px_1 - qx_2 - rx_3 + a_{111}x_1^3 + a_{222}x_2^3 + a_{333}x_3^3 + \\ &\quad + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{122}x_1x_2^2 + \\ &\quad + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + 3a_{233}x_2x_3^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

где положено $a_{jkl} = -S_0 S_j S_k S_l$. Линейная часть системы (3.52) подобна линейной части предыдущего примера. Выражения для a_{jkl} через коэффициенты системы (3.52) опять получаем по формулам (3.48). $A_{kls}^{(j)}$ вычисляются по формулам (3.11), а для $L(\lambda_0)$ имеем:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4\sqrt{q}} (A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{233}^{(3)}). \quad (3.53)$$

Так как $\alpha_{22} = \alpha_{13} = \alpha_{33} = 0$, то выражения для $A_{kls}^{(j)}$ при вычислении по формулам (3.11) сильно упрощаются. Именно, находим:

$$\begin{aligned} A_{222}^{(2)} &= \frac{1}{\Delta_0} \alpha_{21}' (a_{333} - 3a_{133}q + 3a_{113}q^2 - a_{111}q^3) = \\ &= -\frac{q\sqrt{q}S_0}{\Delta_0} (S_1q - S_3)^3, \end{aligned}$$

$$A_{223}^{(8)} = \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{31} (-a_{112} q^2 \sqrt{q} + 2a_{123} q \sqrt{q} - a_{233} \sqrt{q}) = \\ = -\frac{pq \sqrt{q} S_0 S_1}{\Delta_0} (S_1 q - S_3)^2,$$

$$A_{233}^{(2)} = \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{21} (a_{223} q - a_{132} q^2) = -\frac{q^2 \sqrt{q} S_0 S_2^2}{\Delta_0} (S_1 q - S_3),$$

$$A_{333}^{(3)} = \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{31} (-a_{223} q \sqrt{q}) = -\frac{rq \sqrt{q} S_0 S_2^3}{\Delta_0}.$$

Отсюда для $L(\lambda_0)$ получаем:

$$L(\lambda_0) = -\frac{S_0 S_2^2}{p^2 + q} \left[\left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} \right)^3 + p \left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + q \left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} \right) + r \right],$$

или (так как $r = pq$ в силу $R = 0$):

$$L(\lambda_0) = -\frac{S_0 S_2^2}{p^2 + q} \left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} + p \right) \left[\left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} \right)^2 + q \right]. \quad (3.54)$$

Из последнего выражения видно, что знак $L(\lambda_0)$ совпадает со знаком произведения

$$-S_0 \left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} + p \right). \quad (3.55)$$

Подставляя в (3.55) значения S_j , p и q из (3.51) и воспользовавшись для упрощения условием $R = 0$, получаем:

$$-S_0 \left(\frac{S_1 q - S_3}{S_2} + p \right) = \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{Mka}{\alpha(\beta Na + M)} \right) \gamma N. \quad (3.56)$$

Введем теперь безразмерные параметры A , B , χ и σ :

$$A = M\beta, \quad B = \frac{M^2}{Na}, \quad \chi = \frac{k}{M^2}, \quad \sigma = \frac{Na}{M^3}, \quad (3.57)$$

характеризующие, соответственно, искусственное демпфирование, обратную связь, статическую устойчивость самолета и крутизну характеристики вначале,

Из (3.51) и (3.57) получаем:

$$R \equiv pq - r = M^3 [x - \sigma + \sigma(A + B)(1 + \sigma B)]. \quad (3.58)$$

Для $L(\lambda_0)$, принимая во внимание (3.56) и (3.57), находим:

$$L(\lambda_0) = -\frac{\gamma [\sigma^2 B(A + B) - x]}{\sigma(A + B)} G,$$

где

$$G = \frac{MN}{p^2 + q} \left[\left(\frac{S_1 q - S_2}{S_2} \right)^2 + q \right] > 0.$$

Рассмотрим при фиксированных x и σ плоскость параметров A , B , ограничиваясь положительными значениями A

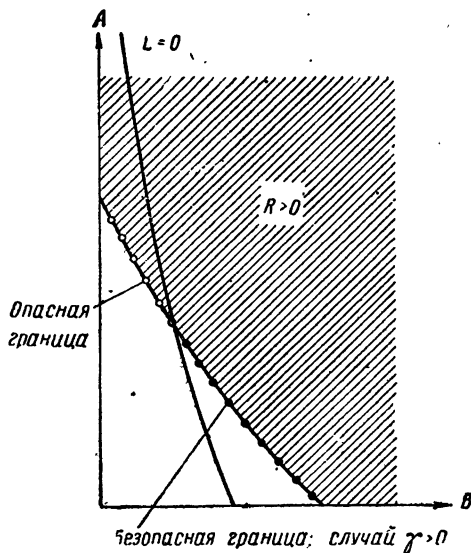


Рис. 31. Пространство параметров при фиксированных x и σ .

и B и предполагая $\sigma - x > 0$. Тогда, как это следует из (3.58), для „малых“ A и B будет $R < 0$, а для „больших“ $R > 0$. Граница области устойчивости будет проходить в первой четверти плоскости A , B . Знак $L(\lambda_0)$ будет зави-

сеть от знака произведения

$$\gamma [\sigma^2 B (A + B) - x].$$

Знак первого множителя зависит здесь от знака кривизны характеристики (рис. 30). Второй множитель обращается в нуль на кривой, лежащей в плоскости A, B . На рис. 31 изображены в плоскости A, B граница области устойчивости $R=0$ и кривая $L=0$. При $\sigma - x > 0$ кривая $L=0$ всегда пересекает границу области устойчивости (при $\sigma - x < 0$ кривая $R=0$ не проходит в области положительных A и B). Характер границы области устойчивости зависит как от расположения рассматриваемого куска границы относительно кривой $L=0$ [от знака $\sigma^2 B (A + B) - x$], так и от вида характеристики (от знака γ). На рис. 31 предполагается, что $\gamma > 0$. Если $\gamma < 0$, то „опасная“ и „безопасная“ части границы меняются местами.

3. Регулирование уровня жидкости

Рассмотрим регулятор с пневматическим сервомотором и жесткой обратной связью для регулирования уровня жидкости в открытом баке. Регулятор рассматриваемого типа может быть использован также для регулирования температуры, давления или расхода.

Схема регулятора приведена на рис. 32.

- E — поплавок, передающий сигнал на управляющий элемент (в реальных конструкциях для уменьшения амплитуды колебания тяги поплавков обычно находится в колене ртутного манометра);
- A — мембранный сервомотор, приводящий в движение заслонку, регулируемую слив;
- B — сильфон жесткой обратной связи, воздействующий посредством тяги, соединенной с мембраной сильфона, на управляющий элемент;
- C — сопло и заслонка управляющего элемента.

Считая, что обратная связь срабатывает мгновенно, и считая линейными все характеристики, за исключением характеристики управляющего элемента в уравнении сервомотора, приходим к такому уравнению движения;

Уравнение объекта регулирования

$$A \frac{dh}{dt} = Q(m, h) = [Q'_m(m_0, h_0) \Delta m + Q'_h(m_0, h_0) \Delta h] + \dots$$

Здесь:

A — коэффициент емкости, т. е. количество жидкости в мм^3 , необходимое для изменения уровня на 1 мм;

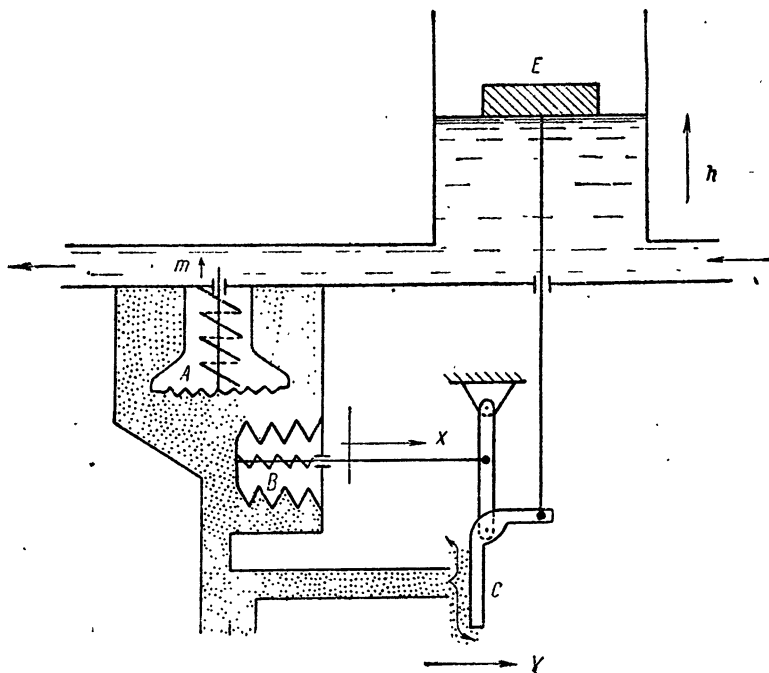


Рис. 32. Регулятор уровня с пневматическим сервомотором.

h — высота жидкости в бачке;

m — координата, характеризующая положение заслонки, регулирующей слив, отсчитываемая в направлении, соответствующем закрытию заслонки;

$Q(m, h)$ — разность прихода и расхода в $\text{мм}^3/\text{сек}$.

Уравнение сервомотора

$$M \frac{d^2 m}{dt^2} + b \frac{dm}{dt} + x_0 m = S_0 P(y). \quad (3.59)$$

Здесь:

M — масса всех движущихся частей регулятора, приведенная к ходу заслонки (к координате m);

b — коэффициент вязкого трения;

x_0 — коэффициент жесткости пружин сервомотора;

P — давление на мембрану сервомотора;

y — расстояние между соплом и заслонкой;

S_0 — площадь мембраны сервомотора.

Уравнение обратной связи. В уравнении обратной связи [имеющем вид (3.59) с заменой m через x , где x — координата, характеризующая положение обратной связи] можно пренебречь первым членом, так как масса механизма обратной связи невелика, и вторым, так как обратная связь жесткая и можно пренебречь вязким трением. Так как жесткость сильфона обратной связи очень невелика, в сравнении с жесткостью мембраны сервомотора, то можно считать, что обратная связь срабатывает мгновенно, и линеаризировать в правой части уравнения характеристику управляющего элемента $P(y)$. Таким образом, получаем:

$$x_1 \Delta x = SP'_y \Delta y.$$

Уравнение заслонки. Заслонка находится под воздействием чувствительного элемента и обратной связи, т. е.

$$y = f(h, x).$$

В окрестности стационарного режима эту зависимость будем считать линейной:

$$\Delta y = f'_x \Delta x + f'_h \Delta h.$$

Будем рассматривать движение в окрестности равновесного режима h_0, m_0, x_0, y_0 . Совершая замены $h = h_0 + \Delta h$, $m = m_0 + \Delta m$, $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ и переходя к безразмерным переменным:

$$\varphi = \frac{\Delta h}{h_0}, \quad \mu = \frac{\Delta m}{m_0}, \quad \xi = \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \eta = \frac{\Delta y}{y_0}, \quad \tau = \frac{Q'_m m_0}{A h_0} t,$$

получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + k\varphi &= \mu, \\ \ddot{\mu} + \bar{b}\dot{\mu} + \bar{x}\mu &= N\{-\bar{x}m_0 + P[y_0(1 + \eta)]\}, \\ \eta &= R\varphi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k &= -\frac{Q'_h h_0}{Q'_m m_0}, \quad \bar{b} = \frac{bAh_0}{MQ'_m m_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{M} \left(\frac{Ah_0}{Q'_m m_0} \right)^2, \\ N &= \frac{1}{Mm_0} \left(\frac{Ah_0}{Q'_m m_0} \right)^2, \quad R = \frac{h_0 x_1 f'_h}{y_0 (x_1 - f'_x SP'_y)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

положительные величины.

Характеристика управляющего элемента (зависимость давления P над сильфонами сервомотора и обратной связи от величины зазора y между соплом и заслонкой) есть монотонно убывающая функция y . Рабочая точка характеристики определяется условием $\bar{x}m_0 = P(y_0)$. Аппроксимируя характеристику в окрестности рабочей точки полиномом

$$P(y_0) = S_1 \eta + S_2 \eta^2 + S_3 \eta^3,$$

окончательно получаем для уравнений движения в окрестности равновесного режима:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} + k\varphi &= \mu, \\ \ddot{\mu} + \bar{b}\dot{\mu} + \bar{x}\mu &= -\alpha\varphi + \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^3, \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

где

$$\alpha = NRS_1, \quad \beta = NRS_2, \quad \gamma = NRS_3.$$

Исключая μ из уравнений (3.61), приходим к одному уравнению третьего порядка:

$$\ddot{\varphi} + p\dot{\varphi} + q\varphi + r\varphi^3 = \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^3,$$

где

$$p = \bar{b} + k, \quad q = \bar{x} + k\bar{b}, \quad r = \alpha + k\bar{x}, \quad (3.62)$$

или к системе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -px_1 - qx_2 - rx_3 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Линейная часть системы (3.63) опять отличается от линейной части предыдущего примера только зависимостью своих коэффициентов от исходных параметров. Из условий устойчивости:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad pq - r > 0,$$

последнее (и только оно) может быть нарушено при изменении режима работы регулятора.

В самом деле, используя (3.60) и (3.62), последнее из условий устойчивости можно представить в виде:

$$\frac{Ab(xA - bQ'_h) + MbQ'_h{}^2}{MAQ'_m x_1 f'_h} > \frac{S_1}{y_0(x_1 + f'_x S S_1)}. \quad (3.64)$$

Левая часть этого выражения положительна ($Q'_h < 0$) и не зависит от условий работы регулятора. Правая часть, наоборот, содержит величины y_0 и S_1 (крутизна характеристики), которые могут меняться в процессе работы регулятора.

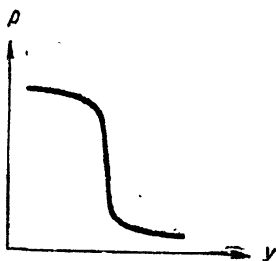


Рис. 33. Характеристика $P(y)$.

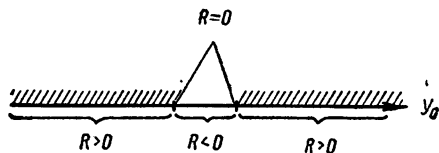


Рис. 34. Линейное пространство параметров.

Примерный вид характеристики $P(y)$ изображен на рис. 33. На небольшом интервале значений y величина S_1 изменяется очень сильно. При возрастании y_0 (при перемещении рабочей точки по характеристике) правая часть (3.64) сначала растет, затем опять убывает. Неустойчивость может наступить лишь в узком интервале значений y_0 (рис. 34).

Вычислим $L(\lambda_0)$. Выражения α_{jk} через коэффициенты системы (3.63) опять получаем из предыдущего [см. (3.48)].

$A_{kl}^{(j)}$ и $A_{kls}^{(j)}$ вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_{kl}^{(j)} &= \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{j1} a_{33}^{(1)} \alpha_{3k} \alpha_{3l}, \\ A_{kls}^{(j)} &= \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{j1} a_{333}^{(1)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}, \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

где

$$a_{33}^{(1)} = \beta, \quad a_{333}^{(1)} = \gamma.$$

Так как $\alpha_{33} = 0$ и, следовательно:

$$\begin{aligned} A_{13}^{(j)} = A_{23}^{(j)} = A_{33}^{(j)} = A_{113}^{(j)} = A_{223}^{(j)} = A_{333}^{(j)} = A_{133}^{(j)} = \\ = A_{233}^{(j)} = A_{123}^{(j)} = 0, \end{aligned}$$

то из (3.15) для $L(\lambda_0)$ получаем:

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) &= \frac{\pi}{4q} [3\sqrt{q}A_{222}^{(2)} - 2A_{22}^{(2)}A_{22}^{(3)}] + \\ &+ \frac{\pi}{2p\sqrt{q}(p^2 + 4q)} [2p\sqrt{q}A_{22}^{(1)}A_{12}^{(3)} + (3p^2 + 8q)A_{32}^{(1)}A_{12}^{(2)}]. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\alpha'_{11} = \sqrt{q}, \quad \alpha'_{21} = -q\sqrt{q}, \quad \alpha'_{31} = -r,$$

из (3.65) будем иметь:

$$\begin{aligned} A_{22}^{(2)} &= -\frac{\beta}{\Delta_0} q\sqrt{q}, & A_{22}^{(3)} &= -\frac{\beta}{\Delta_0} r, & A_{22}^{(1)} &= \frac{\beta}{\Delta_0} \sqrt{q}, \\ A_{12}^{(3)} &= -\frac{\beta}{\Delta_0} qr, & A_{12}^{(2)} &= -\frac{\beta}{\Delta_0} q^2\sqrt{q}, & A_{222}^{(2)} &= -\frac{\gamma}{\Delta_0} q\sqrt{q}. \end{aligned}$$

Для $L(\lambda_0)$ находим окончательно такое выражение:

$$L(\lambda_0) = -\frac{\pi}{4\sqrt{q}(p^2 + q)} \left[3\gamma + \frac{2\beta^2(p^2 + 8q)}{pq(p^2 + 4q)} \right]. \quad (3.66)$$

Если характеристика такова, что $S_3 > 0$ (для нормальных конструкций это выполняется), то также $\gamma = NR^3S_3 > 0$ и на

границе ($R=0$) $L(\lambda_0)$ — отрицательно. Граница $R=0$ «безопасная».

На рис. 35 приведена экспериментальная диаграмма, на которой записаны автоколебания, возникающие при нарушении границы области устойчивости за счет изменения подачи жидкости (и следовательно изменения равновесного режима).

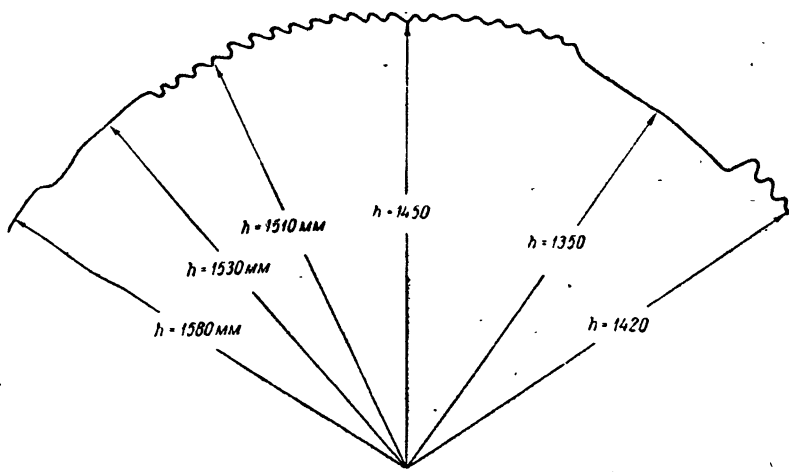


Рис. 35. Экспериментальная диаграмма.

По радиусам откладывается уровень жидкости. Ось времени — окружность. Автоколебания возникают на некотором интервале высот жидкости в бачке вблизи заданной высоты и могут быть прекращены, например, при изменении подачи жидкости, вызывающем смещение равновесного режима как в сторону повышения, так и в сторону понижения уровня жидкости.

4. Следящая система

Рассмотрим простейшую следящую систему, связывающую движение двух осей: *дающей* и *следящей*. Следящая ось, приводимая в движение сервомотором, должна повторять все движения дающей оси, вращаемой незначительным

усилием, обеспечивая необходимое усиление вращающего момента.

Движение такой системы рассматривалось по методу малого параметра Б. В. Булгаковым [30].

Простейшая схема изображена на рис. 36. Давущая ось y связана с контактным роликом A , обкатывающим при вращении осей контактный диск B , связанный со следящей осью x . На контактном диске имеются две контактные пластинки, разделенные небольшим зазором. Контактный ролик, переходя с одной контактной пластинки на другую, меняет направление тока, проходящего через якорь сервомотора с независимым возбуждением, и создает каждый раз момент, стремящийся вращать следящую ось в таком направлении, чтобы расстояние контактного ролика до зазора уменьшалось.

Пренебрегая твердым трением, получим для рассматриваемой системы такие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + k\dot{x} &= aJ, \\ RJ &= E - cx - LJ, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

где

A — момент инерции следящей оси, приведенный к оси вращения якоря сервомотора;

k — коэффициент вязкого трения;

aJ — вращающий момент на оси сервомотора;

R, L, J — соответственно, сопротивление, самоиндукция и ток в якоре сервомотора;

c — коэффициент противоэлектродвижущей силы,

E — электродвижущая сила, приложенная извне к якору сервомотора.

Пусть

$$\psi = y - x$$

означает рассогласование дающей и следящей осей и пусть введен такой отсчет углов y и x , при котором положению контактного ролика на середине зазора между контактными пластинками соответствует $\psi = 0$.

Внешняя э. д. с. будет тогда функцией ψ , симметричной относительно оси ψ .

Для схемы на рис. 36 характеристика $E(\psi)$ будет разрывной функцией, равной нулю при положении ролика на

зазоре ($|\psi| < \psi_0$) и сразу достигающей максимальной величины $\pm E_{\max}$ при переходе ролика на контактную пластинку.

Не представляет, однако, труда ввести в схему изменения, обеспечивающие характер нарастания E в зависимости от ψ , допускающий аппроксимацию непрерывными функциями. Достаточно для этого разбить контактные пластинки на отдельные

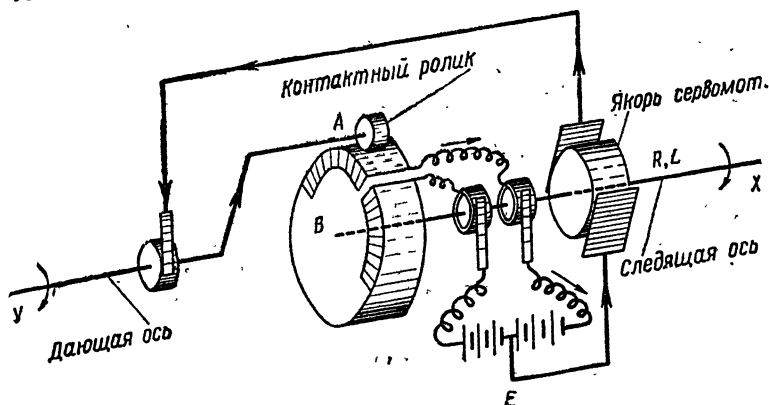


Рис. 36. Следящая система.

секции и внести такие изменения в схему соединения контактных пластинок с источником тока, при которых бы контактный ролик включал не сразу E_{\max} , а по частям, в зависимости от ψ . Различным подключением контактных пластинок можно осуществлять различные типы характеристик $E(\psi)$.

Аппроксимируем $E(\psi)$ в окрестности $\psi = 0$ непрерывной аналитической кривой.

Так как $E(\psi) = -E(-\psi)$, то разложение $E(\psi)$ в ряд по степеням ψ не будет содержать четных степеней ψ . Таким образом, положим:

$$E(\psi) = \alpha\psi + \gamma\psi^3 + \dots \quad (3.68)$$

Исключая J из уравнений (3.67), получаем:

$$\frac{AL}{a} \ddot{x} + \frac{RA + Lk}{a} \dot{x} + \frac{Rk + Ca}{a} x = E(\psi), \quad (3.69)$$

Будем теперь предполагать, что дающая ось равномерно вращается с постоянной скоростью ω . Тогда $y = \omega t$ и, следовательно,

$$\psi \equiv y - x = \omega t - x, \quad \dot{\psi} = \omega - \dot{x}, \quad \ddot{\psi} = -\ddot{x}, \quad \ddot{\psi} = -\ddot{x}.$$

С помощью последних соотношений уравнение (3.69) приводится к виду:

$$\frac{AL}{a} \ddot{\psi} + \frac{RA + Lk}{a} \dot{\psi} + \frac{Rk + Ca}{a} \psi + E(\psi) = \frac{\omega(Rk + Ca)}{a}. \quad (3.70)$$

Рабочая точка $\psi = \psi_0$ характеристики определяется условием

$$E(\psi_0) = \frac{\omega(Rk + Ca)}{a}$$

и, следовательно, зависит от скорости дающей оси. Вводя безразмерное время $\tau = \lambda t$ и безразмерные переменные

$$x_3 = \psi - \psi_0, \quad x_2 = \dot{x}_3, \quad x_1 = \dot{x}_2$$

и принимая во внимание (3.70), приходим к системе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -px_1 - qx_2 - (\varepsilon + 3\sigma\psi_0^2)x_3 - 3\psi_0\sigma x_3^2 - \sigma x_3^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

где

$$p = \frac{RA + Lk}{\lambda AL}, \quad \bar{q} = \frac{Rk + Ca}{\lambda^2 AL},$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha a}{\lambda^3 AL}, \quad \sigma = \frac{\gamma a}{\lambda^3 AL}, \quad \psi_0$$

— безразмерные параметры.

Уравнения (3.71) отличаются от уравнений (3.63) только зависимостью коэффициентов от исходных параметров. Для $L(\lambda_0)$ поэтому получаем из (3.66):

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi\sigma [pq(p^2 + 4q) - 6\sigma\psi_0^2(p^2 + 8q)]}{4\sqrt{q}(p^2 + q)}.$$

Если $\sigma < 0$ (характеристика имеет вид, изображенный на рис. 37), то $L(\lambda_0) < 0$, и граница области устойчивости

всегда „безопасная“. Если $\sigma > 0$ (характеристика имеет вид, изображенный на рис. 38), то $L(\lambda_0)$ может менять знак.

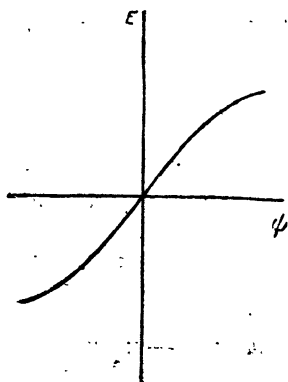


Рис. 37. Характеристика $E(\psi)$,
 $\sigma < 0$.

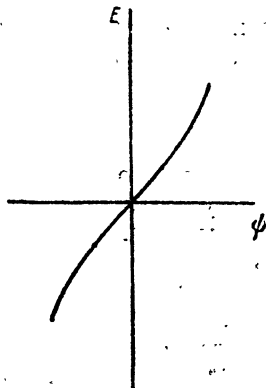


Рис. 38. Характеристика $E(\psi)$,
 $\sigma > 0$.

На рис. 39 изображена область устойчивости в плоскости параметров ψ_0^2 , ε , характеризующих, соответственно, скорость



Рис. 39. Пространство параметров ψ_0^2, ε
при фиксированном $\sigma > 0$.

вращения задающей оси и приложенную извне электродвижущую силу (крутизну характеристики в начале).

Граница области устойчивости дается уравнением

$$R \equiv pq - r = pq - (\varepsilon + 3\sigma\psi_0^2) = 0.$$

Отрезок, отсекаемый прямой $R = 0$ на оси ψ_0^2 , всегда больше отрезка, отсекаемого прямой $L = 0$, так как

$$\frac{pq}{3\sigma} > \frac{pq}{3\sigma} \cdot \frac{p^2 + 4q}{2(p^2 + 8q)}$$

и, следовательно, прямая $L = 0$ всегда пересекает границу области устойчивости, отделяя „опасную“ часть границы от „безопасной“.

Из рис. 39 видно, что при *небольших* ε увеличение скорости дающей оси приводит к нарушению „безопасной“ границы, и, следовательно, к малым автоколебаниям скорости следящей оси, а при *больших* ε — к нарушению „опасной“ границы и, следовательно, к значительному рас-
согласованию в движениях дающей и следящей осей.

5. Регулирование числа оборотов регулятором прямого действия при наличии нелинейности в катаракте или в восстанавливающей силе

1°. Рассмотрим регулирование скорости центробежным регулятором прямого действия (рис. 40), пренебрегая твердым трением и считая линейными характеристики всех элементов, кроме характеристики катаракта (характеристики вязкого трения).

При линейной идеализации уравнения процесса регулирования имеют вид ^[81]:

$$\left. \begin{aligned} T_a \ddot{\varphi} &= -\mu - \text{уравнение машины;} \\ T_r \ddot{\mu} + f(\mu) + \delta \mu &= \varphi - \text{уравнение регулятора,} \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

где $f(\mu) = T_k \dot{\mu}$ — характеристика катаракта; T_a , T_r , T_k — параметры, имеющие размерность времени: T_a — так называемое время разгона машины; T_r — умноженный на 2π период собственных колебаний регулятора; T_k — так называемое время катаракта; δ — коэффициент неравномерности регулятора; φ, μ — безразмерные переменные: φ — относительное

отклонение регулируемой величины (скорости машины),
 μ — относительное смещение муфты регулятора.

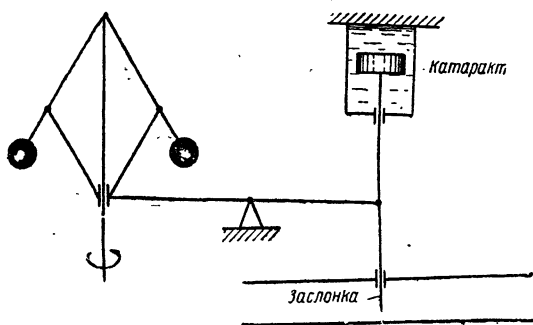


Рис. 40. Центробежный регулятор прямого действия.

Рассмотрим нелинейную характеристику катаракта

$$f(\mu) = T_k \dot{\mu} + k\mu^2 + h\mu^3.$$

Введем безразмерное время τ и новую безразмерную переменную x :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt[3]{T_a T_r^2}} t, \quad x = \mu \sqrt[3]{\frac{T_r^2}{T_a}}$$

и исключаем φ . Система (3.72) запишется тогда в виде одного уравнения

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax + x = -2\alpha B^2 \dot{x}\ddot{x} - 3\beta B^3,$$

где

$$A = \delta \sqrt[3]{\frac{T_a^2}{T_r^2}} \quad \text{и} \quad B = \frac{T_k}{T_r} \sqrt[3]{\frac{T_a}{T_r}}$$

так называемые главные параметры теории прямого регулирования, или параметры Вышнеградского, а

$$\alpha = \frac{k}{T_k^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{h}{T_k^3}$$

величины, характеризующие поведение характеристики катракта в окрестности рабочей точки.

Переходя к переменным

$$x_3 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_1 = \ddot{x},$$

получим, вместо одного уравнения, систему:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -Bx_1 - Ax_2 - x_3 - 2\alpha B^2 x_1 x_2 - 3\beta B^3 x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

Условия Рауга — Гурвица дают для системы (3.73) неравенства:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad R \equiv AB - 1 > 0,$$

выделяющие в плоскости A, B область, ограниченную кривой $AB = 1$ (так называемой гиперболой Вышнеградского).

Вычислим знак $L(\lambda_0)$ на гиперболе Вышнеградского. Для α_{ji} из (3.73) и (3.9) имеем:

$$\alpha_{11} = B, \quad \alpha_{21} = -1, \quad \alpha_{31} = A, \quad \alpha_{12} = -A,$$

$$\alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{32} = 1, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{23} = -\sqrt{A}, \quad \alpha_{33} = 0.$$

Из (3.73) находим, что

$$a_{12}^{(1)} = -\alpha B^2, \quad a_{122}^{(1)} = -\beta B^3,$$

а остальные $a_{ji}^{(p)}$ и $a_{jls}^{(p)}$ равны нулю.

Для коэффициентов $A_{kl}^{(j)}$ и $A_{kls}^{(j)}$, пользуясь (3.11), поэтому получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_{jl}^{(j)} &= \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{j1} a_{12}^{(1)} (\alpha_{1k} \alpha_{2i} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}), \\ A_{jls}^{(j)} &= \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{j1} a_{122}^{(1)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{1s} + \alpha_{2k} \alpha_{2s} \alpha_{1l} + \alpha_{2l} \alpha_{2s} \alpha_{1k}). \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

Так как $\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{13} = 0$, то из (3.74):

$$A_{22}^{(j)} = A_{33}^{(j)} = A_{222}^{(j)} = A_{333}^{(j)} = A_{223}^{(j)} = 0.$$

Для $L(\lambda_0)$ из (3.15) находим ($p = B, q = A$):

$$\left. \begin{aligned} L(\lambda_0) = & \frac{\pi}{4A} \cdot 3\sqrt{A} A_{233}^{(2)} + \\ & + \frac{\pi}{4B\sqrt{A}(B^2 + 4A)} [4B^2 A_{23}^{(1)} (A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + \\ & + 8B\sqrt{A} A_{23}^{(1)} (A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)})]. \end{aligned} \right\} (3.75)$$

Далее имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_{233}^{(2)} = & \frac{\beta}{\Delta_0} \alpha'_{21} A^2 B^3, & A_{23}^{(1)} = & -\frac{\alpha}{\Delta_0} \alpha'_{11} B^2 A \sqrt{A}, \\ A_{13}^{(2)} = & \frac{\alpha}{\Delta_0} \alpha'_{21} B^3 \sqrt{A}, & A_{13}^{(3)} = & \frac{\alpha}{\Delta_0} \alpha'_{31} B^3 \sqrt{A}, \\ A_{12}^{(2)} = & -\frac{\alpha}{\Delta_0} \alpha'_{21} B^2 A, & A_{12}^{(3)} = & -\frac{\alpha}{\Delta_0} \alpha'_{31} B^2 A, \end{aligned} \right\} (3.76)$$

где

$$\alpha'_{21} = -A\sqrt{A}, \quad \alpha'_{11} = \sqrt{A}, \quad \alpha'_{31} = -1.$$

Подставляя (3.76) в (3.75) и пользуясь для упрощения соотношением $AB = 1$, получаем:

$$L(\lambda_0) = \frac{\pi B \sqrt{B}}{4(A^2 + B)(B^2 + 4A)} [8\alpha^2 B - 3\beta(B + 4A^2)].$$

Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках.

Возможны случаи:

а) $\beta < 0$ и, следовательно, $L(\lambda_0) > 0$.

Граница области устойчивости „опасная“;

б) $\beta > 0, 8\alpha^2 - 3\beta < 0$ и, следовательно, $L(\lambda_0) < 0$.

Граница области устойчивости „безопасная“;

в) $\beta > 0, 8\alpha^2 - 3\beta > 0$. Кривая $L(\lambda_0) = 0$ пересекает границу области устойчивости (гиперболу Вышнеградского), отделяя „опасную“ часть границы от „безопасной“.

На рис. 41 в плоскости параметров A, B изображена область устойчивости для этого последнего случая.

Точка с координатами

$$A = \sqrt[3]{\frac{8\alpha^2 - 3\beta}{12\beta}}, \quad B = \sqrt[3]{\frac{12\beta}{8\alpha^2 - 3\beta}}$$

отделяет на гиперболе Вышнеградского „опасную“ часть от „безопасной“. Надежная работа регулятора возможна вблизи „безопасной“ границы. Изменения параметров, приводящие

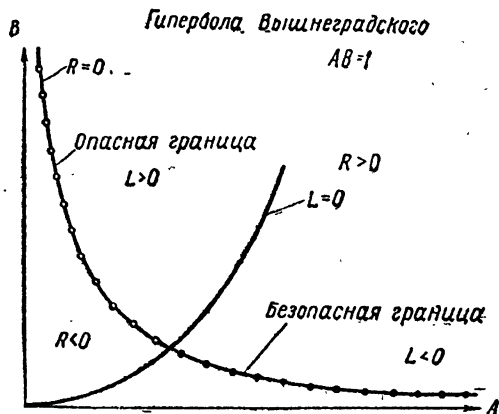


Рис. 41. Пространство параметров A, B при нелинейности в катаракте. Случай $\beta > 0, 8\alpha^2 - 3\beta > 0$.

к нарушению „безопасной“ границы, ведут лишь к возникновению автоколебаний малой амплитуды около стационарного режима. При работе вблизи „опасной“ границы, нарушения нормальной работы регулятора могут происходить как при случайных изменениях параметров системы, выводящих систему за пределы области устойчивости, так и при значениях параметров, лежащих внутри области устойчивости, в результате резкого изменения режима работы регулятора (например, при сбросе или увеличении нагрузки).

2°. Рассмотрим регулирование скорости центробежным регулятором прямого действия, считая линейными характеристики всех элементов, кроме характеристики восстанавливающей силы, а именно примем:

$$F(\mu) = \delta\mu + k\mu^2 + h\mu^3.$$

Уравнения (3.72) с сохранением прежних обозначений заменятся тогда уравнениями:

$$T_a \dot{\varphi} = -\mu,$$

$$T_r^2 \ddot{\mu} + T_k \dot{\mu} + \delta \mu + k \mu^2 + h \mu^3 = \varphi.$$

Вводя безразмерное время τ , новые переменные x_1, x_2, x_3 :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt[3]{T_a T_r^2}} t, \quad x_3 = \mu \sqrt[3]{\frac{T_r^2}{T_a}}, \quad x_2 = \dot{x}_3, \quad x_1 = \dot{x}_2$$

и исключая φ , приходим к системе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -Bx_1 - Ax_2 - x_3 - 2\alpha A^2 x_2 x_3 - 3\beta A^3 x_2 x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

где

$$A = \delta \sqrt[3]{\frac{T_a^2}{T_r^2}} \quad \text{и} \quad B = \frac{T_k}{T_r} \sqrt[3]{\frac{T_a}{T_r}}$$

— параметры Вышнеградского, а

$$\alpha = \frac{k}{\delta^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{h}{\delta^3}$$

величины, характеризующие поведение характеристики восстанавливающей силы в окрестности рабочей точки.

Область устойчивости в плоскости A, B ограничена гиперболой Вышнеградского.

Уравнения (3.77) отличаются от уравнений (3.80) только зависимостью своих коэффициентов от исходных параметров.

Для $L(\lambda_0)$ поэтому получаем из (3.82):

$$L(\lambda_0) = - \frac{\pi \sqrt{A}}{4(A^2 + B)(B^2 + 4A)} [(4\alpha^2 + 12\beta)A^3 + 3\beta].$$

Возможны случаи:

а) $\beta > 0$ и, следовательно, $L(\lambda_0) < 0$.

Граница области устойчивости „безопасная“;

б) $4\alpha^2 + 12\beta < 0$ и, следовательно, $L(\lambda_0) > 0$.

Граница области устойчивости „опасная“;

е) $4\alpha^2 + 12\beta > 0$, $\beta < 0$. Кривая $L(\lambda_0)$ пересекает границу области устойчивости, отделяя „опасную“ часть границы от „безопасной“.

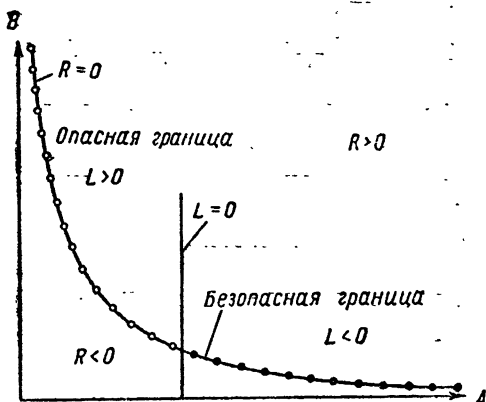


Рис. 42. Пространство параметров A , B при нелинейности восстанавливающей силы. Случай $\beta < 0$, $4\alpha^2 + 12\beta > 0$.

На рис. 42 в плоскости параметров A , B изображена область устойчивости для этого последнего случая. Точка с координатами

$$A = \sqrt[3]{\frac{-3\beta}{4\alpha^2 + 12\beta}}, \quad B = \sqrt[3]{\frac{4\alpha^2 + 12\beta}{-3\beta}}$$

отделяет на гиперболе Вышнеградского „опасную“ часть от „безопасной“.

6. Генератор с учетом сеточного тока

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 43. Сохраняя обычные обозначения, мы можем записать уравнения для токов в контурах:

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C} \int_0^t (J - J_a) dt = M \frac{dJ_g}{dt},$$

$$L_g \frac{dJ_g}{dt} + RJ_g + V_g = M \frac{dJ}{dt}. \quad (3.78)$$

Примем характеристики в виде:

$$J_a = S \left(1 - \frac{V_g^2}{3V_s^2} \right) V_g, \quad V_g = R'_g J_g.$$

Сводя систему (3.78) к одному уравнению третьего порядка относительно сеточного тока J_g , получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{J}_g (LL_g - M^2) + \dot{J}_g [(R_g + R'_g)L + RL_g] + \\ + J_g \left[(R_g + R'_g)R + \frac{1}{C} (L_g - MSR'_g) \right] + \\ + J_g \frac{1}{C} (R'_g + R_g) + \frac{E_0}{C} = - \frac{MSR'_g{}^2}{CV_s^2} J_g^2 \dot{J}_g. \end{aligned}$$

Вводим безразмерные переменные x и τ с помощью соотношений

$$J_g = x J_{g0} - \frac{E_0}{R_g + R'_g}$$

и

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t = \omega_0 t;$$

при этом переменная x вводится таким образом, что стационарному режиму соответствует значение $x = 0$. Уравнение (3.78) запишется тогда в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + p\dot{x} + qx + rx = \\ = \alpha x \dot{x} - \beta x^2 \dot{x}, \quad (3.79) \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{LC [L(R'_g + R'_g) + RL_g]}{LL_g - M^2}, \quad r = \frac{R'_g + R_g}{C(LL_g - M^2)\omega_0^2},$$

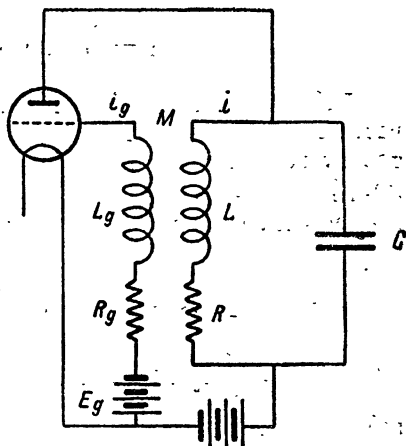


Рис. 43. Генератор.

$$q = \frac{SR_g'^3 ME_0^2 + V_g^2 (R_g' + R_g)^2 [CR (R_g' + R_g) + L_g - MSR_g']}{CV_g^2 (R_g + R_g')^2 (LL_g - M^2) \omega_0^2},$$

$$\alpha = \frac{2SR_g'^3 J_{g0} ME_0}{CV_g^2 (R_g + R_g') (LL_g - M^2) \omega_0^2},$$

$$\beta = \frac{SR_g'^3 J_{g0} M}{CV_g^2 (LL_g - M^2) \omega_0^2}$$

— безразмерные параметры, или, окончательно, в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -px_1 - qx_2 - rx_3 + \alpha x_2 x_3 - \beta x_2 x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где

$$x_1 = \ddot{x}, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = x.$$

Линейная часть системы (3.80) отличается от линейной части системы (3.46) только зависимостью своих коэффициентов от исходных параметров и поэтому выражение α_{ji} через коэффициенты системы (3.80) получаем из (3.48). $A_{kl}^{(j)}$, $A_{kls}^{(j)}$ вычисляются по формулам:

$$A_{kl}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{j1} a_{23}^{(1)} (\alpha_{2l} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k}), \quad (3.81)$$

$$A_{kls}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \alpha'_{j1} a_{233}^{(1)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}),$$

где

$$a_{23}^{(1)} = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{233}^{(1)} = -\frac{\beta}{3}, \quad \Delta_0 = \sqrt{q}(q^2 + pr).$$

Так как $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{33} = 0$ и, следовательно,

$$A_{22}^{(j)} = A_{33}^{(j)} = A_{222}^{(j)} = A_{333}^{(j)} = A_{233}^{(j)} = 0,$$

то из (3.15) получаем для $L(\lambda_0)$:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4\sqrt{q}} A_{223}^{(3)} + \frac{\pi}{\sqrt{q}(p^2 + 4q)} A_{23}^{(1)} [p(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + \sqrt{q}(A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)})].$$

Заметив, что $\alpha'_{11} = \sqrt{q}$, $\alpha'_{21} = -q\sqrt{q}$, $\alpha'_{31} = -r$, из (3.81) будем иметь:

$$A_{23}^{(1)} = -\frac{\alpha q}{2\Delta_0}, \quad A_{13}^{(2)} = \frac{\alpha q^3}{2\Delta_0},$$

$$A_{13}^{(3)} = \frac{\alpha q r \sqrt{q}}{2\Delta_0},$$

$$A_{12}^{(2)} = \frac{\alpha q r \sqrt{q}}{2\Delta_0}, \quad A_{12}^{(3)} = \frac{\alpha r^2}{2\Delta_0},$$

$$A_{223}^{(3)} = -\frac{\beta r \sqrt{q}}{3\Delta_0}.$$

Для $L(\lambda_0)$ находим окончательно такое выражение:

$$L(\lambda_0) = -\frac{\pi p q}{4\Delta_0^2(p^2 + 4q)} [\beta \Delta_0(p^2 + 4q) + \alpha^2 q \sqrt{q}(p^2 + q)]. \quad (3.82)$$

Очевидно, что на границе ($R=0$) $L(\lambda_0)$ всегда отрицательно. Граница $R=0$ „безопасная“. При нарушении границы $R=0$ происходит мягкое возникновение автоколебаний (рис. 44).

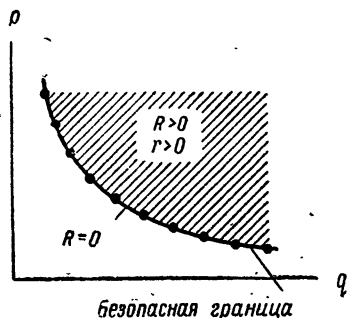


Рис. 44. Пространство параметров.

ГЛАВА IV

СИСТЕМА ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 + a_3^{(1)}x_3 + a_4^{(1)}x_4 + P_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_1^{(2)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + a_3^{(2)}x_3 + a_4^{(2)}x_4 + P_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1^{(3)}x_1 + a_2^{(3)}x_2 + a_3^{(3)}x_3 + a_4^{(3)}x_4 + P_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_1^{(4)}x_1 + a_2^{(4)}x_2 + a_3^{(4)}x_3 + a_4^{(4)}x_4 + P_4(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Здесь $P_j(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержат членов ниже второго измерения.

Характеристическое уравнение для уравнений первого приближения будет:

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - x \end{vmatrix} = 0, \quad (4.2)$$

или:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

где:

$$\begin{aligned}
 p &= -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)} + a_4^{(4)}), \\
 q &= \left| \begin{array}{cc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right| + \\
 &+ \left| \begin{array}{cc} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right|, \\
 r &= - \left| \begin{array}{ccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right| - \\
 &- \left| \begin{array}{ccc} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right|, \\
 s &= \left| \begin{array}{cccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{array} \right|.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Условия Раута — Гурвица сводятся здесь к неравенствам:

$$p > 0, q > 0, r > 0, s > 0, R \equiv pqr - sp^2 - r^2 > 0. \tag{4.4}$$

Границами области устойчивости служат поверхности:

$$s = 0 \text{ и } R = 0.*$$

На первой из них характеристическое уравнение имеет корень, равный нулю, на второй — чисто мнимые корни.

* Точнее, части этих поверхностей, проходящие в той области пространства коэффициентов, где выполняются условия $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$.

Характер второй пары корней на границе $R = 0$ зависит от знака выражения:

$$\Delta_1^* = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4}. \quad (4.5)$$

1. Если $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$, $R = 0$, $\Delta_1^* > 0$, то характеристическое уравнение (4.2) имеет корни:

$$x_1 = bi, \quad x_2 = -bi, \quad x_3 = m + ni, \quad x_4 = m - ni,$$

где:

$$b^2 = \frac{r}{p}, \quad m = -\frac{p}{2}, \quad n^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4} \quad (n > 0). \quad (4.6)$$

2. Если $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$, $R = 0$, $\Delta_1^* < 0$, то уравнение (4.2) имеет корни:

$$x_1 = bi, \quad x_2 = -bi, \quad x_3 = m + n = \sigma, \quad x_4 = m - n = \nu,$$

где

$$n = \sqrt{-\Delta_1^*}. \quad (4.7)$$

Характер остальных корней на границе $s = 0$ зависит от знака выражения:

$$\Delta_2^* = 27r^2 - 18pqr + 4q^3 + 4p^3r - p^2q^2. \quad (4.8)$$

1. Если $\Delta_2^* < 0$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s = 0$, $R > 0$, то уравнение (4.2) имеет один корень равный нулю и три действительных отрицательных корня.

2. Если $\Delta_2^* > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s = 0$, $R > 0$, то уравнение (4.2) имеет один корень, равный нулю, один действительный отрицательный и два комплексных с отрицательной действительной частью.

Рисунки 45 и 46 дают геометрическую интерпретацию условий Раута — Гурвица.

Рисунок 45 изображает поверхность $R = 0$ в пространстве p , q , r при фиксированном $s > 0$; область устойчивости находится внутри изображенной части поверхности. На заштрихованной части поверхности характеристическое уравнение имеет, помимо пары чисто мнимых корней, два действительных корня, на незаштрихованной — два комплексных.

Рисунок 46 изображает ту же поверхность в пространстве q , r , s , при фиксированном $p > 0$; границами области

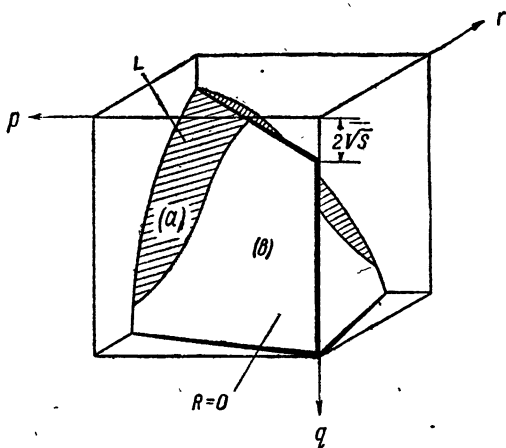


Рис. 45. Геометрическая интерпретация условий Раута—Гурвица в пространстве p, q, r при фиксированном s .

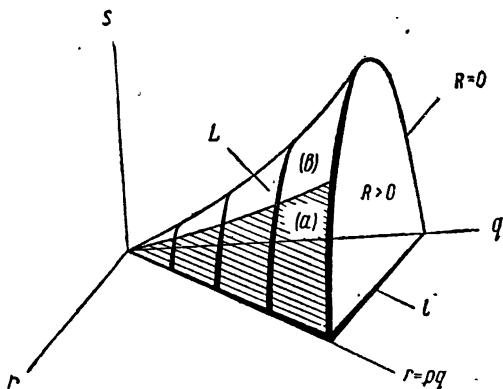


Рис. 46. Геометрическая интерпретация условий Раута—Гурвица в пространстве q, r, s при фиксированном p .

устойчивости служит поверхность гиперболического параболоида и „плоскость“ $s = 0$. Область устойчивости — внутренность гиперболического параболоида.

В дальнейших параграфах рассматриваются следующие вопросы: в § 1 и § 2 даются два различных по форме выражения для ляпуновской величины $L(\lambda_0)$, характеризующей поведение системы вблизи границы $R = 0$; § 3 дает выражение для ляпуновской величины $I(\lambda_0)$, характеризующей поведение системы вблизи границы $s = 0$.

§ 1. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты системы, приведенной к каноническому виду

Здесь следует различать два случая в зависимости от характера второй пары корней (кроме пары чисто мнимых).

1°. *Случай, когда на границе $R = 0$ характеристическое уравнение не имеет действительных корней (вторая пара корней — комплексная) ($4s - gp > 0$).*

Приводим сначала систему (4.1) к каноническому виду*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -b\xi_2 + Q_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= b\xi_1 + Q_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= m\xi_3 - n\xi_4 + Q_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_4}{dt} &= n\xi_3 + m\xi_4 + Q_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где m , n и b определяются (4.6). Ищем с этой целью решение линейной системы, получаемой из (4.1) при $P_j = 0$ на границе $R = 0$ в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \sigma_{1k} e^{x_k t}; & x_2^{(k)} &= \sigma_{2k} e^{x_k t}; & x_3^{(k)} &= \sigma_{3k} e^{x_k t}; \\ & & & & x_4^{(k)} &= \sigma_{4k} e^{x_k t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

* Ляпунов, стр. 73. Мы опять изложим для рассматриваемых случаев развернутое приведение к каноническому виду, так как эту операцию приходится фактически выполнять при расчете конкретных примеров.

Для определения σ_{jk} получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1k}(a_1^{(1)} - x_k) + \sigma_{2k}a_2^{(1)} + \sigma_{3k}a_3^{(1)} + \sigma_{4k}a_4^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{1k}a_1^{(2)} + \sigma_{2k}(a_2^{(2)} - x_k) + \sigma_{3k}a_3^{(2)} + \sigma_{4k}a_4^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{1k}a_1^{(3)} + \sigma_{2k}a_2^{(3)} + \sigma_{3k}(a_3^{(3)} - x_k) + \sigma_{4k}a_4^{(3)} &= 0, \\ \sigma_{1k}a_1^{(4)} + \sigma_{2k}a_2^{(4)} + \sigma_{3k}a_3^{(4)} + \sigma_{4k}(a_4^{(4)} - x_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Пусть нумерация исходных уравнений (4.1) была такова, что

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1^{(1)} - x_1 & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_1 & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_1 \end{array} \right| \neq 0, \quad (4.12)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} a_2^{(2)} - x_3 & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_3 & a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - x_3 \end{array} \right| \neq 0.$$

Такие два минора всегда найдутся (доказательство аналогично приведенному выше для системы трех уравнений).

Из системы (4.11) находим:

$$\sigma_{11} = \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_2^{(2)} - x_1 & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_1 & a_4^{(3)} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{21} = - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x_1 & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - x_1 & a_4^{(3)} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{31} = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x_1 & a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_1 & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{41} = - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x_1 a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_1 a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_1 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{13} = - \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - x_3 a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_3 a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - x_3 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{23} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - x_3 a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - x_3 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{33} = - \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_3 a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_4^{(4)} - x_3 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{43} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_3 a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_3 \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} \end{vmatrix}.$$

Корню x_2 будут соответствовать σ_{j2} , сопряженные с σ_{j1} .
а корню x_4 будут соответствовать σ_{j4} , сопряженные с σ_{j3} .
Пусть

$$\sigma_{j1} = \alpha_{j1} - i\alpha_{j2}, \quad \sigma_{j2} = \alpha_{j1} + i\alpha_{j2},$$

$$\sigma_{j3} = \alpha_{j3} - i\alpha_{j4}, \quad \sigma_{j4} = \alpha_{j3} + i\alpha_{j4}.$$

Так как (4.10) образуют систему линейно-независимых решений, то

$$\|x_j^{(k)}\| \neq 0,$$

а следовательно, и

$$\|\alpha_{jk}\| \neq 0.$$

В силу последнего условия решение системы (4.1):

$$x_j = h(\alpha_{j1} \cos bt + \alpha_{j2} \sin bt) + k(\alpha_{j3} e^{mt} \cos nt + \alpha_{j4} e^{mt} \sin nt)$$

может быть разрешено относительно

$$\begin{aligned} h \cos bt &= \xi_1, & h \sin bt &= \xi_2, \\ ke^{mt} \cos nt &= \xi_3, & ke^{mt} \sin nt &= \xi_4, \end{aligned}$$

где ξ_j рассматриваются как новые переменные.

Таким образом, подстановка

$$x_j = \alpha_{j1}\xi_1 + \alpha_{j2}\xi_2 + \alpha_{j3}\xi_3 + \alpha_{j4}\xi_4 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (4.13)$$

приводит исходную систему (4.1) к виду (4.9). α_{jk} выражаются через коэффициенты (4.1) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix} - b^2 a^{(1)}; \\ \alpha_{12} &= b \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}; \\ \alpha_{21} &= \begin{vmatrix} a_3^{(3)} & a_1^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_3^{(1)} & a_1^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix} - b^2 a_4^{(2)}; \\ \alpha_{22} &= b \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix}; \\ \alpha_{31} &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix} - b^2 a_4^{(3)}; \\ \alpha_{32} &= b \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix}; \\ \alpha_{41} &= b^2 (a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\alpha_{42} = b^3 - b \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} - \\ - b \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_3^{(3)} - m & a_4^{(3)} & a_1^{(3)} \\ a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - m & a_1^{(4)} \\ a_3^{(2)} & a_4^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix} - n^2 a_1^{(2)};$$

$$\alpha_{24} = n \begin{vmatrix} a_3^{(3)} - m & a_1^{(3)} \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a_4^{(4)} - m & a_1^{(4)} \\ a_4^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} a_4^{(4)} - m & a_2^{(4)} & a_1^{(4)} \\ a_4^{(2)} & a_2^{(2)} - m & a_1^{(2)} \\ a_4^{(3)} & a_2^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix} - n^2 a_1^{(3)};$$

$$\alpha_{34} = n \begin{vmatrix} a_4^{(4)} - m & a_1^{(4)} \\ a_4^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - m & a_1^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - m & a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - m & a_1^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_1^{(4)} \end{vmatrix} - n^2 a_1^{(4)};$$

$$\alpha_{44} = n \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - m & a_1^{(2)} \\ a_2^{(4)} & a_1^{(4)} \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a_3^{(3)} - m & a_1^{(3)} \\ a_3^{(4)} & a_1^{(4)} \end{vmatrix};$$

$$\alpha_{13} = n^2 (a_2^{(2)} + a_3^{(3)} + a_4^{(4)} - 3m) -$$

$$- \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - m & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - m & a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - m \end{vmatrix};$$

(4.1)

$$\alpha_{14} = n^3 - n \left| \begin{array}{cc} a_2^{(2)} - m & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - m \end{array} \right| - \\ - n \left| \begin{array}{cc} a_2^{(2)} - m & a_4^{(2)} \\ a_2^{(4)} & a_4^{(4)} - m \end{array} \right| - n \left| \begin{array}{cc} a_3^{(3)} - m & a_4^{(3)} \\ a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - m \end{array} \right|. \quad (4.14)$$

Если представить $P_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в виде рядов по степеням x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$P_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}^{(\nu)} x_1^2 + a_{22}^{(\nu)} x_2^2 + a_{33}^{(\nu)} x_3^2 + \\ + a_{44}^{(\nu)} x_4^2 + 2a_{12}^{(\nu)} x_1 x_2 + 2a_{13}^{(\nu)} x_1 x_3 + 2a_{14}^{(\nu)} x_1 x_4 + \\ + 2a_{23}^{(\nu)} x_2 x_3 + 2a_{24}^{(\nu)} x_2 x_4 + 2a_{34}^{(\nu)} x_3 x_4 + a_{111}^{(\nu)} x_1^3 + \\ + a_{222}^{(\nu)} x_2^3 + a_{333}^{(\nu)} x_3^3 + a_{444}^{(\nu)} x_4^3 + 3a_{112}^{(\nu)} x_1^2 x_2 + \\ + 3a_{113}^{(\nu)} x_1^2 x_3 + 3a_{114}^{(\nu)} x_1^2 x_4 + 3a_{122}^{(\nu)} x_1 x_2^2 + 3a_{223}^{(\nu)} x_2^2 x_3 + \\ + 3a_{224}^{(\nu)} x_2^2 x_4 + 3a_{133}^{(\nu)} x_1 x_3^2 + 3a_{233}^{(\nu)} x_2 x_3^2 + 3a_{334}^{(\nu)} x_3^2 x_4 + \\ + 3a_{144}^{(\nu)} x_1 x_4^2 + 3a_{244}^{(\nu)} x_2 x_4^2 + 3a_{344}^{(\nu)} x_3 x_4^2 + \\ + 6a_{123}^{(\nu)} x_1 x_2 x_3 + 6a_{124}^{(\nu)} x_1 x_2 x_4 + \\ + 6a_{134}^{(\nu)} x_1 x_3 x_4 + 6a_{234}^{(\nu)} x_2 x_3 x_4 + \dots \quad (4.15)$$

и, соответственно, в таком же виде правые части системы (4.9) (заменяв $a_{jk}^{(\nu)}$ и $a_{jkl}^{(\nu)}$ через $A_{jk}^{(\nu)}$ и $A_{jkl}^{(\nu)}$), то коэффициенты преобразованной системы будут выражаться через исходные по формулам:

$$A_{kl}^{(p)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^4 a'_{jp} [a_{11}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} + a_{22}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} + \\ + a_{33}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} + a_{44}^{(p)} \alpha_{4k} \alpha_{4l} + a_{12}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) + \\ + a_{13}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) + a_{14}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{4l} + \alpha_{1l} \alpha_{4k}) + \\ + a_{23}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k}) + a_{24}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{4l} + \alpha_{2l} \alpha_{4k}) + \\ + a_{34}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{4l} + \alpha_{3l} \alpha_{4k})], \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
A_{kls}^{(j)} = & \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^4 \alpha'_{jp} \left\{ a_{111}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{1s} + a_{222}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + a_{333}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s} + \right. \\
& + a_{444}^{(p)} \alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{4s} + a_{112}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{1s} + \alpha_{2k} \alpha_{1l} \alpha_{1s}) + \\
& + a_{113}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1k} \alpha_{3l} \alpha_{1s} + \alpha_{3k} \alpha_{1l} \alpha_{1s}) + \\
& + a_{114}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{4s} + \alpha_{1k} \alpha_{4l} \alpha_{1s} + \alpha_{4k} \alpha_{1l} \alpha_{1s}) + \\
& + a_{221}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{1s} + \alpha_{2k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \\
& + a_{223}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \\
& + a_{224}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{4s} + \alpha_{2k} \alpha_{4l} \alpha_{2s} + \alpha_{4k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \\
& + a_{331}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{1s} + \alpha_{3k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + \\
& + a_{332}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + \\
& + a_{334}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{4s} + \alpha_{3k} \alpha_{4l} \alpha_{3s} + \alpha_{4k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + \\
& + a_{441}^{(p)} (\alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{1s} + \alpha_{4k} \alpha_{1l} \alpha_{4s} + \alpha_{1k} \alpha_{4l} \alpha_{4s}) + \\
& + a_{442}^{(p)} (\alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{2s} + \alpha_{4k} \alpha_{2l} \alpha_{4s} + \alpha_{2k} \alpha_{4l} \alpha_{4s}) + \\
& + a_{443}^{(p)} (\alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{3s} + \alpha_{4k} \alpha_{3l} \alpha_{4s} + \alpha_{3k} \alpha_{4l} \alpha_{4s}) + \\
& + a_{123}^{(p)} [(\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) \alpha_{3s} + \\
& + (\alpha_{1k} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{2k}) \alpha_{3l} + (\alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{2l}) \alpha_{3k}] + \\
& + a_{124}^{(p)} [(\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) \alpha_{4s} + \\
& + (\alpha_{1k} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{2k}) \alpha_{4l} + (\alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{2l}) \alpha_{4k}] + \\
& + a_{134}^{(p)} [(\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) \alpha_{4s} + \\
& + (\alpha_{1k} \alpha_{3s} + \alpha_{1s} \alpha_{3k}) \alpha_{4l} + (\alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1s} \alpha_{3l}) \alpha_{4k}] + \\
& + a_{234}^{(p)} [(\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k}) \alpha_{4s} + \\
& + (\alpha_{2k} \alpha_{3s} + \alpha_{2s} \alpha_{3k}) \alpha_{4l} + (\alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2s} \alpha_{3l}) \alpha_{4k}] \left. \right\},
\end{aligned}$$

где $\Delta_0 = \|\alpha'_{jd}\|$ и α'_{jp} — адьюнкта элемента α_{jp} .

Перейдем теперь в системе (4.9) к полярным координатам $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ и исключим t , тогда (4.9) сведется к системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= R_2(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_3}{d\varphi} &= Z_2(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_4}{d\varphi} &= S_2(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4). \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Развернем правые части системы (4.17) по степеням ρ , ξ_3 , ξ_4 и будем искать ее решение в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= u_1(\varphi) \rho_0 + u_2(\varphi) \rho_0^2 + u_3(\varphi) \rho_0^3 + \dots, \\ \xi_3 &= v_1(\varphi) \rho_0 + v_2(\varphi) \rho_0^2 + v_3(\varphi) \rho_0^3 + \dots, \\ \xi_4 &= w_1(\varphi) \rho_0 + w_2(\varphi) \rho_0^2 + w_3(\varphi) \rho_0^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.17) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_0 , получаем для определения u_j , v_j , w_j рекуррентные дифференциальные уравнения, из которых последовательно определяем u_j , v_j , w_j с начальными условиями:

$$u_1(0) = 1, \quad u_j(0) = 0 \quad (j \neq 1), \quad v_j(0) = w_j(0) = 0. \quad (4.19)$$

Полагая в построенном таким образом решении системы (4.17) $\varphi = 2\pi$, получаем:

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots, \quad \xi_3 = \beta_j \rho_0^j + \dots, \quad \xi_4 = \gamma_j \rho_0^j + \dots, \quad (4.20)$$

где

$$\alpha_j = u_j(2\pi), \quad \beta_j = v_j(2\pi), \quad \gamma_j = w_j(2\pi).$$

Первая ляпуновская величина $L(\lambda_0)$ совпадает с α_3 .

Вычисление дает для α_3 следующее выражение через коэффициенты преобразованной системы:

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) = \alpha_3 = \frac{\pi}{4b^2} \left\{ 2(A_{22}^{(1)} A_{22}^{(2)} - A_{11}^{(1)} A_{11}^{(2)}) - 2A_{12}^{(2)}(A_{11}^{(2)} + A_{22}^{(2)}) + \right. \\ \left. + 2A_{12}^{(1)}(A_{11}^{(1)} + A_{22}^{(1)}) + 3b(A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{112}^{(2)} + A_{122}^{(1)}) + \right. \\ \left. + \frac{2b}{\Delta} (2(A_{23}^{(1)} + A_{13}^{(2)})(m^2 + n^2) [b(n^2 - m^2 - 4b^2) A_{11}^{(3)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m(n^2 + 4b^2 + m^2) A_{12}^{(8)} + b(m^2 - n^2 + 4b^2) A_{22}^{(8)} - \\
& - 2bmn A_{11}^{(4)} + n(m^2 + n^2 - 4b^2) A_{12}^{(4)} + 2bmn A_{22}^{(4)} + \\
& + 2(A_{24}^{(1)} + A_{14}^{(2)})(m^2 + n^2) [n(4b^2 - m^2 - n^2) A_{12}^{(3)} + \\
& + m(m^2 + n^2 + 4b^2) A_{12}^{(4)} - b(m^2 - n^2 + 4b^2) A_{11}^{(4)} - \\
& - 2bmn A_{22}^{(3)} + b(m^2 - n^2 + 4b^2) A_{22}^{(4)} + 2bmn A_{11}^{(3)}] + \\
& + (3A_{13}^{(1)} + A_{23}^{(2)}) [m(m^2 + n^2)^2 A_{11}^{(3)} + \\
& + 2b^2 m(4b^2 + 3m^2 - n^2) A_{11}^{(3)} + \\
& + 2b(m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 4b^2) A_{12}^{(3)} - \\
& - 2b^2 m(3n^2 - m^2 - 4b^2) A_{22}^{(3)} + n(m^2 + n^2)^2 A_{11}^{(4)} + \\
& + 2b^2 n(m^2 - 3n^2 + 4b^2) A_{11}^{(4)} + 4mnb(m^2 + n^2) A_{12}^{(4)} + \\
& + 2b^2 n(4b^2 + 3m^2 - n^2) A_{22}^{(4)} + \\
& + (3A_{14}^{(1)} + A_{24}^{(2)}) [2b^2 n(3n^2 - m^2 - 4b^2) A_{11}^{(3)} - \\
& - n(m^2 + n^2)^2 A_{11}^{(3)} - 4mnb(m^2 + n^2) A_{12}^{(3)} - 2b^2 n(3m^2 + \\
& + 4b^2 - n^2) A_{22}^{(3)} + m(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + 6b^2) A_{11}^{(4)} + \\
& + 8m b^2 (b^2 - n^2) A_{11}^{(4)} - \\
& - 2b(m^2 + n^2)(n^2 - m^2 - 4b^2) A_{12}^{(4)} + \\
& + 2b^2 m(m^2 - 3n^2 + 4b^2) A_{22}^{(4)} + \\
& + (3A_{23}^{(2)} + A_{13}^{(1)}) [2b^2 m(4b^2 + m^2 - 3n^2) A_{11}^{(3)} - \\
& - 2b(m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 4b^2) A_{12}^{(3)} - \\
& - 2b^2 m(n^2 - 4b^2 - 3m^2) A_{22}^{(3)} + m(m^2 + n^2)^2 A_{22}^{(3)} + \\
& + 2b^2 n(4b^2 + 3m^2 - n^2) A_{11}^{(4)} - 4bmn(m^2 + n^2) A_{12}^{(4)} - \\
& - 2nb^2(3n^2 - m^2 - 4b^2) A_{22}^{(4)} + n(m^2 + n^2)^2 A_{22}^{(4)}] + \\
& + (3A_{24}^{(2)} + A_{14}^{(1)}) [4bmn(m^2 + n^2) A_{12}^{(3)} - 2b^2 n(3m^2 + \\
& + 4b^2 - n^2) A_{11}^{(3)} - n(m^2 + n^2)^2 A_{22}^{(3)} - \\
& - 2b^2 n(m^2 - 3n^2 + 4b^2) A_{22}^{(3)} + 2b^2 m(4b^2 + m^2 - 3n^2) A_{11}^{(4)} - \\
& - 2b(m^2 + n^2)(4b^2 + m^2 - n^2) A_{12}^{(4)} + \\
& + m(m^2 + n^2)^2 A_{22}^{(4)} + \\
& \quad \left. + 2b^2 m(3m^2 + 4b^2 - n^2) A_{22}^{(4)} \right\}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = -(m^2 + n^2) [16b^4 + 8b^2(m^2 - n^2) + (m^2 + n^2)^2].$$

2°. Случай, когда на границе $R = 0$ характеристическое уравнение имеет действительную вторую пару корней ($4s - rp < 0$).

Приводим систему (4.1) к каноническому виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -b\xi_2 + Q_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= l\xi_1 + Q_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \sigma\xi_3 + Q_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_4}{dt} &= \nu\xi_4 + Q_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \end{aligned} \right\} (4.22)$$

где $\sigma = m + n$, $\nu = m - n$; b , m , n — имеют значения, указанные в (4.6) и (4.7).

С этой целью ищем опять на границе $R = 0$ решение линейной системы, соответствующей системе (4.22), в виде:

$$x_j^{(k)} = \sigma_{jk} e^{\lambda_k t}. \quad (4.23)$$

Пусть нумерация исходных уравнений была такова, что

$$\left. \begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} a_{(1)}^{(1)} - \chi_1 & a_{(2)}^{(1)} & a_{(3)}^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - \chi_1 & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \chi_1 \end{array} \right| & \neq 0, \\ \left| \begin{array}{ccc} a_2^{(2)} - \chi_3 & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \chi_3 & a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - \chi_3 \end{array} \right| & \neq 0, \\ \left| \begin{array}{ccc} a_1^{(1)} - \chi_4 & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - \chi_4 & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - \chi_4 \end{array} \right| & \neq 0. \end{aligned} \right\} (4.24)$$

Тогда, подобно предыдущему, находим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_2^{(2)} - \chi_1 & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \chi_1 & a_4^{(3)} \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{21} &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \chi_1 & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - \chi_1 & a_4^{(3)} \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{31} &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \chi_1 & a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - \chi_1 & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{41} &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \chi_1 & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - \chi_1 & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \chi_1 \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{13} &= \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - \sigma & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \sigma & a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - \sigma \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{23} &= - \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - \sigma & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - \sigma \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{33} &= \begin{vmatrix} a_1^{(3)} & a_2^{(2)} - \sigma & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_4^{(4)} - \sigma \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{43} &= - \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - \sigma & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \sigma \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} \end{vmatrix}, \\
 \sigma_{14} &= \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \nu & a_4^{(3)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - \nu \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{24} &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \nu a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - \nu a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_3^{(4)} - \nu a_4^{(4)} \end{vmatrix}, \\ \sigma_{34} &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \nu a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} - \nu a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} - \nu a_4^{(4)} \end{vmatrix}, \\ \sigma_{44} &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \nu a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} - \nu a_3^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} - \nu a_3^{(4)} \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} (4.25)$$

и σ_{j2} — сопряженные σ_{j1} .

Пусть $\sigma_{j1} = \beta_{j1} - i\beta_{j2}$, $\sigma_{j2} = \beta_{j1} + i\beta_{j2}$, $\sigma_{j3} = \beta_{j3}$, $\sigma_{j4} = \beta_{j4}$; тогда также находим, что $\|\beta_{jk}\| \neq 0$ и, следовательно, решенные системы (4.22):

$$x_j = h (\beta_{j1} \cos bt + \beta_{j2} \sin bt) + k_1 \beta_{j3} e^{\sigma t} + k_2 \beta_{j4} e^{\nu t}$$

может быть разрешено относительно

$$\xi_1 = h \cos bt, \quad \xi_2 = \dot{h} \sin bt, \quad \xi_3 = k_1 e^{\sigma t}, \quad \xi_4 = k_2 e^{\nu t},$$

рассматриваемых как новые переменные.

Таким образом подстановка

$$x_j = \beta_{j1} \xi_1 + \beta_{j2} \xi_2 + \beta_{j3} \xi_3 + \beta_{j4} \xi_4 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (4.26)$$

приводит исходную систему (4.1) к виду (4.22); β_{jk} выражаются через коэффициенты системы (4.1) следующим образом:

β_{j1} и β_{j2} — по формулам (4.14) ($\beta_{j1} = \alpha_{j1}$, $\beta_{j2} = \alpha_{j2}$);

β_{j3} и β_{j4} — по формулам (4.25) ($\beta_{j3} = \sigma_{j3}$, $\beta_{j4} = \sigma_{j4}$).

Если представить правые части системы (4.1) в виде рядов по степеням x_1, x_2, x_3, x_4 , сохраняя обозначения (4.15), и соответственно этому в таком же виде — правые части системы (4.22) (заменяя только $a_{jk}^{(\nu)}$ и $a_{jkl}^{(\nu)}$ через $A_{jk}^{(\nu)}$ и $A_{jkl}^{(\nu)}$), то коэффициенты преобразованной системы опять будут выражаться через исходные по формулам (4.16).

Переходим теперь в системе (4.22) к полярным координатам, полагая $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$, и исключаем t . Тогда система (4.22) сведется к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= R_1(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_3}{d\varphi} &= Z_1(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \\ \frac{d\xi_4}{d\varphi} &= S_1(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4). \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Подобно предыдущему ищем решение системы (4.27) в виде рядов по степеням ρ , ξ_3 , ξ_4 с теми же начальными условиями, что и раньше, и полагая опять в построенном таким образом решении $\varphi = 2\pi$, получаем:

$$\rho = \rho_0 + \bar{\alpha}_3 \rho_0^3 + \dots, \quad \xi_3 = \bar{\beta}_j \rho_0^j + \dots, \quad \xi_4 = \bar{\gamma}_j \rho_0^j + \dots, \quad (4.28)$$

Здесь $L(\lambda_0)$ совпадает с $\bar{\alpha}_3$.

Вычисление дает для $\bar{\alpha}_3$ следующее выражение через коэффициенты преобразований системы:

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) = \bar{\alpha}_3 = \frac{\pi}{4b^2} & \left\{ 2(A_{22}^{(1)} A_{22}^{(2)} - A_{11}^{(1)} A_{11}^{(2)}) - 2(A_{11}^{(2)} + A_{22}^{(2)}) A_{12}^{(2)} + \right. \\ & + 2(A_{11}^{(1)} + A_{22}^{(1)}) A_{12}^{(1)} + 3b(A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{112}^{(2)} + A_{122}^{(1)}) + \\ & + \frac{2b}{m(m^2 + 4b^2)} \left[(A_{23}^{(1)} + A_{13}^{(2)}) (2mbA_{11}^{(3)} - 2mbA_{22}^{(3)} - 2m^2 A_{12}^{(3)}) - \right. \\ & - (m^2 + 8b^2) (A_{11}^{(3)} A_{23}^{(2)} + A_{22}^{(3)} A_{13}^{(1)}) + 4mb (A_{12}^{(3)} A_{23}^{(2)} - A_{13}^{(1)} A_{12}^{(3)}) - \\ & - (3m^2 + 8b^2) (A_{11}^{(3)} A_{13}^{(1)} + A_{22}^{(3)} A_{23}^{(2)}) \left. \right] + \\ & + \frac{2b}{n(n^2 + 4b^2)} \left[(A_{24}^{(1)} + A_{14}^{(2)}) (2nbA_{11}^{(4)} - 2nbA_{22}^{(4)} - 2n^2 A_{12}^{(4)}) - \right. \\ & - (n^2 + 8b^2) (A_{11}^{(4)} A_{24}^{(2)} + A_{22}^{(4)} A_{14}^{(1)}) + 4nb (A_{12}^{(4)} A_{24}^{(2)} - A_{14}^{(1)} A_{12}^{(4)}) - \\ & \left. - (3n^2 + 8b^2) (A_{11}^{(4)} A_{14}^{(1)} + A_{22}^{(4)} A_{24}^{(2)}) \right] \left. \right\}. \quad (4.29) \end{aligned}$$

§ 2. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы (без приведения к каноническому виду)

Запишем систему (4.1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 + a_3^{(1)}x_3 + a_4^{(1)}x_4 + \mu P_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_1^{(2)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + a_3^{(2)}x_3 + a_4^{(2)}x_4 + \mu P_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1^{(3)}x_1 + a_2^{(3)}x_2 + a_3^{(3)}x_3 + a_4^{(3)}x_4 + \mu P_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_1^{(4)}x_1 + a_2^{(4)}x_2 + a_3^{(4)}x_3 + a_4^{(4)}x_4 + \mu P_4, \end{aligned} \right\} (4.30)$$

где μ — малый параметр; при $\mu = 1$ система (4.30) совпадает с (4.1).

1-й случай: $4s - rp > 0$.

Общее решение линейной системы [получаемой из (4.30) при $\mu = 0$] имеет вид:

$$x_j = h [\alpha_{j1} \cos b(t + t_0) + \alpha_{j2} \sin b(t + t_0) + k [\alpha_{j3} e^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1) + \alpha_{j4} e^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1)]]. \quad (4.31)$$

Семейство периодических решений линейной системы на границе $R = 0$ выделяется значением произвольного постоянного $k = 0$. Каждое периодическое решение соответствует замкнутой кривой в пространстве x_j .

Рассмотрим четыре семейства поверхностей:

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^2 \text{ — получаемое исключением из (4.31) } ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1); \quad ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1) \text{ и } (t + t_0);$$

$$n(x_1, x_2, x_3, x_4; s) = 0 \text{ — получаемое из (4.31) исключением } ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1); \quad ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1) \text{ и } h \text{ и заменой } t + t_0 \text{ через } s;$$

$$N_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_1) = 0 \text{ — получаемое из (4.31) исключением } h \cos b(t + t_0); \quad h \sin b(t + t_0) \text{ и } ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1) \text{ и заменой } ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1) \text{ через } \eta_1;$$

$N_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_2) = 0$ — получаемое из (4.31) исключением $h \cos b(t + t_0)$; $h \sin b(t + t_0)$ и $ke^{m(t+t_1)} \cos n(t+t_1)$ и заменой $ke^{m(t+t_1)} \sin n(t+t_1)$ через η_2 .

Решение системы:

$$H = h^2, \quad n = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0 \quad (4.32)$$

относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4 можно тогда представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\alpha_{11} \cos bs + \alpha_{12} \sin bs) + \\ &\quad + \alpha_{13} \eta_1 + \alpha_{14} \eta_2, \\ x_2 &= f_2(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\alpha_{21} \cos bs + \alpha_{22} \sin bs) + \\ &\quad + \alpha_{23} \eta_1 + \alpha_{24} \eta_2, \\ x_3 &= f_3(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\alpha_{31} \cos bs + \alpha_{32} \sin bs) + \\ &\quad + \alpha_{33} \eta_1 + \alpha_{34} \eta_2, \\ x_4 &= f_4(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\alpha_{41} \cos bs + \alpha_{42} \sin bs) + \\ &\quad + \alpha_{43} \eta_1 + \alpha_{44} \eta_2. \end{aligned} \right\} (4.33)$$

Выделим теперь в (4.32) некоторую замкнутую кривую C_{h_0} и введем в окрестности этой кривой новую систему координат $\delta, s, \eta_1, \eta_2$ ($h_0 + \delta = h$). Имеем тогда:

$$\begin{aligned} f'_{jh} \frac{d\delta}{dt} + f'_{js} \frac{ds}{dt} + f'_{j\eta_1} \frac{d\eta_1}{dt} + f'_{j\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} = \\ = a_1^{(j)} f_1 + a_2^{(j)} f_2 + a_3^{(j)} f_3 + a_4^{(j)} f_4 + \mu P_j. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\mu \Delta_1}{\Delta + \mu \Delta_2} = R(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \\ \frac{d\eta_{11}}{ds} &= \frac{\Delta(m\eta_1 - n\eta_2) + \mu \Delta_3}{\Delta + \mu \Delta_2} = S_1(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \\ \frac{d\eta_{12}}{ds} &= \frac{\Delta(n\eta_1 + m\eta_2) + \mu \Delta_4}{\Delta + \mu \Delta_2} = S_2(\delta, s, \eta_1, \eta_2). \end{aligned} \right\} (4.34)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1e} & f'_{2e} & f'_{3e} & f'_{4e} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} \equiv bh \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \equiv bh\Delta_0, \quad (4.35)$$

а Δ_j — определители четвертого порядка, получаемые заменой j -ой строки в определителе Δ строкой

$$P_1, P_2, P_3, P_4.$$

Разворачиваем (4.34) в ряды по степеням δ , η_1 , η_2 , μ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \mu R'_\mu + \frac{1}{2} R''_{\mu\mu} \mu^2 + R'''_{\delta\mu} \delta\mu + R''_{\eta_1\mu} \eta_1\mu + \\ &\quad + R''_{\eta_2\mu} \eta_2\mu + \dots, \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= S'_{1\eta_1} \eta_1 + S'_{1\eta_2} \eta_2 + S'_{1\mu} \mu + \frac{1}{2} S''_{1\mu\mu} \mu^2 + \\ &\quad + S''_{1\delta\mu} \delta\mu + S''_{1\eta_1\mu} \eta_1\mu + S''_{1\eta_2\mu} \eta_2\mu + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= S'_{2\eta_1} \eta_1 + S'_{2\eta_2} \eta_2 + S'_{2\mu} \mu + \frac{1}{2} S''_{2\mu\mu} \mu^2 + \\ &\quad + S''_{2\delta\mu} \delta\mu + S''_{2\eta_1\mu} \eta_1\mu + S''_{2\eta_2\mu} \eta_2\mu + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

и ищем решение в виде рядов по степеням μ и начальных значений δ_0 , η_{10} , η_{20} :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= C_{1000} \delta_0 + C_{0100} \eta_{10} + C_{0010} \eta_{20} + C_{0001} \mu + \\ &\quad + C_{0002} \mu^2 + \dots, \\ \eta_1 &= D_{1000} \delta_0 + D_{0100} \eta_{10} + D_{0010} \eta_{20} + D_{0001} \mu + \\ &\quad + D_{0002} \mu^2 + \dots, \\ \eta_2 &= E_{1000} \delta_0 + E_{0100} \eta_{10} + E_{0010} \eta_{20} + E_{0001} \mu + \\ &\quad + E_{0002} \mu^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

с начальными условиями $C_{1000}(0) = D_{0100}(0) = E_{0010}(0) = 1$, $C_{jkl}(0) = D_{jkl}(0) = E_{jkl}(0) = 0$ для остальных значений индексов jkl .

Подставляя (4.37) в (4.36) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ_0 , η_{10} , η_{20} и μ , получаем рекур-

рентные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_{1000} &= 0, \quad \dot{C}_{0100} = 0, \quad \dot{C}_{0010} = 0, \quad \dot{C}_{0001} = R'_{\mu}, \\
 \dot{C}_{0002} &= \frac{1}{2} R''_{\mu\mu} + C_{0001} R''_{\eta\mu} + D_{0001} R''_{\eta\mu} + E_{0001} R''_{\eta\eta}, \\
 \dot{D}_{1000} &= D_{1000} S'_{1\eta_1} + E_{1000} S'_{1\eta_2}, \\
 \dot{E}_{1000} &= D_{1000} S'_{2\eta_1} + E_{1000} S'_{2\eta_2}, \\
 \dot{D}_{0100} &= D_{0100} S'_{1\eta_1} + E_{0100} S'_{1\eta_2}, \\
 \dot{E}_{0100} &= D_{0100} S'_{2\eta_1} + E_{0100} S'_{2\eta_2}, \\
 \dot{D}_{0010} &= D_{0010} S'_{1\eta_1} + E_{0010} S'_{1\eta_2}, \\
 \dot{E}_{0010} &= D_{0010} S'_{2\eta_1} + E_{0010} S'_{2\eta_2}, \\
 D_{0001} &= D_{0001} S'_{1\eta_1} + E_{0001} S'_{1\eta_2} + S'_{1\mu}, \\
 \dot{E}_{0001} &= D_{0001} S'_{2\eta_1} + E_{0001} S'_{2\eta_2} + S'_{2\mu},
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

где

$$\begin{aligned}
 R'_{\mu}(0; s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix}, \\
 R''_{\mu\mu}(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{2}{h_0^2 b^2 \Delta_0^2} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} \times \\
 &\times \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\delta\mu}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \cdot \frac{d}{dh} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} & f_{4s} \\ f_{1\eta_1} & f_{2\eta_1} & f_{3\eta_1} & f_{4\eta_1} \\ f_{1\eta_2} & f_{2\eta_2} & f_{3\eta_2} & f_{4\eta_2} \end{vmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{h_0^2 b \Delta_0} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} & f_{4s} \\ f_{1\eta_1} & f_{2\eta_1} & f_{3\eta_1} & f_{4\eta_1} \\ f_{1\eta_2} & f_{2\eta_2} & f_{3\eta_2} & f_{4\eta_2} \end{vmatrix}, \\
 R_{\eta_1\mu}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \begin{vmatrix} P'_{1\eta_1} & P'_{2\eta_1} & P'_{3\eta_1} & P'_{4\eta_1} \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} & f_{4s} \\ f_{1\eta_1} & f_{2\eta_1} & f_{3\eta_1} & f_{4\eta_1} \\ f_{1\eta_2} & f_{2\eta_2} & f_{3\eta_2} & f_{4\eta_2} \end{vmatrix}, \\
 R_{\eta_2\mu}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \begin{vmatrix} P'_{1\eta_2} & P'_{2\eta_2} & P'_{3\eta_2} & P'_{4\eta_2} \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} & f_{4s} \\ f_{1\eta_1} & f_{2\eta_1} & f_{3\eta_1} & f_{4\eta_1} \\ f_{1\eta_2} & f_{2\eta_2} & f_{3\eta_2} & f_{4\eta_2} \end{vmatrix}, \\
 S'_{1\mu}(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f_{1h} & f_{2h} & f_{3h} & f_{4h} \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} & f_{4s} \\ f_{1\eta_2} & f_{2\eta_2} & f_{3\eta_2} & f_{4\eta_2} \end{vmatrix}, \\
 S'_{2\mu}(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f_{1h} & f_{2h} & f_{3h} & f_{4h} \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} & f_{4s} \\ f_{1\eta_1} & f_{2\eta_1} & f_{3\eta_1} & f_{4\eta_1} \end{vmatrix}, \\
 S'_{1\eta_1}(0, s, 0, 0, 0) &= m; \quad S'_{1\eta_2}(0, s, 0, 0, 0) = -n, \\
 S'_{2\eta_1}(0, s, 0, 0, 0) &= n; \quad S'_{2\eta_2}(0, s, 0, 0, 0) = m.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Из (4.38), принимая во внимание начальные условия, получаем:

$$\begin{aligned}
 C_{1000} &= 1, \quad C_{0100} = C_{0010} = D_{1000} = E_{1000} = 0, \\
 D_{0100} &= e^{ms} \cos ns, \quad D_{0010} = e^{ms} \sin ns, \\
 E_{0100} &= e^{ms} \sin ns, \quad E_{0010} = -e^{ms} \cos ns, \\
 D_{0001} &= \int_0^s \left[S'_{1\mu} \cos \sqrt{m^2 + n^2} (s - \xi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} (mS'_{1\mu} - nS'_{2\mu}) \sin \sqrt{m^2 + n^2} (s - \xi) \right] d\xi, \\
 E_{0001} &= \int_0^s \left[S'_{2\mu} \cos \sqrt{m^2 + n^2} (s - \xi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} (nS'_{1\mu} + mS'_{2\mu}) \sin \sqrt{m^2 + n^2} (s - \xi) \right] d\xi, \\
 C_{0002} &= \int_0^s \left(\frac{1}{2} R''_{\mu\mu} + R''_{\xi\mu} C_{0001} + R''_{\eta\mu} D_{0001} + \right. \\
 &\quad \left. + R''_{\eta\mu} E_{0001} \right) d\xi, \\
 C_{0001} &= \int_0^s R'_{\mu} d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Полагая в (4.37) $s = \tau$, где $\tau = \frac{2\pi}{b}$ — период на кривой C_{h_0} , получаем в окрестности точки $(0, 0, 0)$ „функцию соответствия“:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta &= \delta_0 + C_{0001}(\tau) \mu + C_{0002}(\tau) \mu^2 + \mu F_1(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu), \\
 \eta_1 &= D_{0100}(\tau) \eta_{10} + D_{0001}(\tau) \mu + \mu F_2(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu), \\
 \eta_2 &= E_{0010}(\tau) \eta_{20} + E_{0001}(\tau) \mu + \mu F_3(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu).
 \end{aligned} \right\} \tag{4.41}$$

Сопоставим теперь (4.20) и (4.41). Геометрический смысл равенств (4.20) заключается в преобразовании для достаточно малых ρ „прямой“ $\xi_3 = \xi_4 = \varphi = 0$ в некоторую „кривую“ $\varphi = 0$, $F_1^*(\rho, \xi_3, \xi_4) = F_2^*(\rho, \xi_3, \xi_4) = 0$ *. Если положить в равенствах (4.41) η_{10} и η_{20} равными нулю, то (4.41) также

* F_1^* и F_2^* определяются равенствами (4.20).

будет давать для достаточно малых δ_0 преобразование прямой $\eta_1 = \eta_2 = s = 0$ в некоторую кривую $s = \psi_1(\delta, \eta_1, \eta_2) = \psi_2(\delta, \eta_1, \eta_2) = 0^*$. Из равенств (4.13) и (4.33) совместно с соотношениями $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ находим, что прямые $\xi_3 = \xi_4 = \varphi = 0$ и $\eta_1 = \eta_2 = s = 0$ совпадают, и, что $\rho = h$. Выбирая теперь такое h_0 , чтобы кривая C_{h_0} находилась внутри области сходимости (4.20), находим связь между ρ и δ :

$$\rho = h_0 + \delta,$$

или:

$$\rho - \rho_0 = \delta - \delta_0. \quad (4.42)$$

Представив правые части выражений для ρ и δ в (4.20) и (4.41) в виде рядов по μ , h_0 и δ_0 [введение μ в (4.20) соответствует вычислению α_3 для системы (4.30)] и, воспользовавшись равенством (4.42), получаем выражение α_3 через C_{0001} и C_{0002} . Имеем:

$$(A_1\mu + A_2\mu^2)(h_0 + \delta_0)^3 + \dots = C_{0001}(\tau)\mu + C_{0002}(\tau)\mu^2 + \dots,$$

откуда

$$\alpha_3 = A_1 + A_2 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \{ C_{0001}(\tau) + C_{0002}(\tau) \} \right]_{h_0=0}.$$

Выражение для $C_{0001}(\tau)$ и $C_{0002}(\tau)$ получим из (4.39) и (4.40),

полагая $s = \tau = \frac{2\pi}{\delta}$ и воспользовавшись соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} &= \frac{d}{ds} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} P'_{1\eta_1} & P'_{2\eta_1} & P'_{3\eta_1} & P'_{4\eta_1} \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} &+ \begin{vmatrix} P'_{1\eta_2} & P'_{2\eta_2} & P'_{3\eta_2} & P'_{4\eta_2} \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \end{vmatrix} + \\ + (P'_{1x_1} + P'_{2x_2} + P'_{3x_3} + P'_{4x_4}) \Delta. & \quad (4.43) \end{aligned}$$

* ψ_1 и ψ_2 определяются равенствами (4.41) при условии $\eta_{10} = \eta_{20} = 0$.

Тогда для $L(\lambda_0)$ будем иметь выражение:

$$\begin{aligned}
 L(\lambda_0) = & \frac{1}{31b\Delta_0} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/b} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} ds \right]_{h_0=0} + \\
 & + \frac{1}{31b\Delta_0} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/b} \begin{vmatrix} P'_{1\eta_1} & P'_{2\eta_1} & P'_{3\eta_1} & P'_{4\eta_1} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} D_{0001} + \right. \\
 & \left. + \begin{vmatrix} P'_{1\eta_2} & P'_{2\eta_2} & P'_{3\eta_2} & P'_{4\eta_2} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} E_{0001} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \left(\begin{vmatrix} P'_{1\eta_2} & P'_{2\eta_2} & P'_{3\eta_2} & P'_{4\eta_2} \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1\eta_1} & f'_{2\eta_1} & f'_{3\eta_1} & f'_{4\eta_1} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P'_{1\eta_1} & P'_{2\eta_1} & P'_{3\eta_1} & P'_{4\eta_1} \\ f'_{1h} & f'_{2h} & f'_{3h} & f'_{4h} \\ f'_{1s} & f'_{2s} & f'_{3s} & f'_{4s} \\ f'_{1\eta_2} & f'_{2\eta_2} & f'_{3\eta_2} & f'_{4\eta_2} \end{vmatrix} \right) + \right. \\
 & \left. + P'_{1x_1} + P'_{2x_2} + P'_{3x_3} + P'_{4x_4} \right] ds \Big|_{h_0=0} \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

где D_{0001} и E_{0001} в развернутом виде даны в (4.40), а в P_j и $P'_{\nu\eta_j} = \alpha_{1j}P'_{\nu x_1} + \alpha_{2j}P'_{\nu x_2} + \alpha_{3j}P'_{\nu x_3} + \alpha_{4j}P'_{\nu x_4}$ нужно подставить уравнение кривой C_{h_0} :

$$x_j = h_0(\alpha_{j1} \cos bs + \alpha_{j2} \sin bs) \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (4.45)$$

Значения Δ_0 и b даются в (4.35) и (4.6).

2-й случай $4s - rp < 0$.

Общее решение линейной системы (полученной из (4.30) при $\mu = 0$) имеет вид:

$$x_j = h_0 [\beta_{j1} \cos b(t + t_0) + \beta_{j2} \sin b(t + t_0)] + k_1 \beta_{j3} e^{st} + k_2 \beta_{j4} e^{vt}. \quad (4.46)$$

Семейство периодических решений линейной системы на границе $R = 0$ выделяется значениями произвольных постоянных $k_1 = k_2 = 0$. Периодическим решениям соответствуют замкнутые траектории в пространстве x_j .

Рассмотрим опять семейства поверхностей:

$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^2$, получаемое из (4.46) исключением $k_1 e^{st}$, $k_2 e^{vt}$ и $(t + t_0)$;

$n(x_1, x_2, x_3, x_4; s) = 0$, получаемое из (4.46) исключением $k_1 e^{st}$, $k_2 e^{vt}$ и h и заменой $t + t_0 = s$;

$N_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_1) = 0$, получаемое из (4.46) исключением $h \cos b(t + t_0)$, $h \sin b(t + t_0)$, $k_2 e^{vt}$ и заменой $k_1 e^{st}$ через η_1 ;

$N_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_2) = 0$, получаемое из (4.46) исключением $h \cos b(t + t_0)$, $h \sin b(t + t_0)$, $k_1 e^{st}$ и заменой $k_2 e^{vt}$ через η_2 .

Решение системы:

$$H = h^2, \quad n = 0, \quad N_1 = 0; \quad N_2 = 0 \quad (4.47)$$

относительно переменных x_j можно тогда представить в виде:

$$x_j = f_j(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\beta_{j1} \cos bs + \beta_{j2} \sin bs) + \beta_{j3} \eta_1 + \beta_{j4} \eta_2. \quad (4.48)$$

Выделим в (4.47) некоторую замкнутую кривую C_{h_0} и введем в окрестности этой кривой новую систему координат $\delta, s, \eta_1, \eta_2$ ($h_0 + \delta = h$).

Имеем тогда:

$$\begin{aligned} f'_{j\delta} \frac{d\delta}{dt} + f'_{js} \frac{ds}{dt} + f'_{j\eta_1} \frac{d\eta_1}{dt} + f'_{j\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} = \\ = a_1^{(j)} f_1 + a_2^{(j)} f_2 + a_3^{(j)} f_3 + a_4^{(j)} f_4 + \mu P_j, \end{aligned}$$

отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\mu\Delta_1}{\Delta + \mu\Delta_2} = \bar{R}(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= \frac{\Delta(m\eta_1 - n\eta_2) + \mu\Delta_3}{\Delta + \mu\Delta_2} = \bar{S}_1(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= \frac{\Delta(n\eta_1 + m\eta_2) + \mu\Delta_4}{\Delta + \mu\Delta_2} = \bar{S}_2(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \end{aligned} \right\} (4.49)$$

здесь Δ и Δ_j имеют такое же значение, что и в (4.34) (с заменой α_{jt} через β_{jt}). Развертываем (4.49) в ряды по степеням δ , η_1 , η_2 и μ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta_1}{ds} &= \bar{S}'_{1\eta_1}\eta_1 + \bar{S}'_{1\eta_2}\eta_2 + \bar{S}'_{1\mu}\mu + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= \bar{S}'_{2\eta_1}\eta_1 + \bar{S}'_{2\eta_2}\eta_2 + \bar{S}'_{2\mu}\mu + \dots, \\ \frac{d\delta}{ds} &= \mu\bar{R}'_{\mu} + \frac{1}{2}R''_{\mu\mu}\mu^2 + R''_{\delta\mu}\delta\mu + R''_{\eta_1\mu}\eta_1\mu + R''_{\eta_2\mu}\eta_2\mu + \dots \end{aligned} \right\} (4.50)$$

и ищем решение в виде рядов по степеням μ и начальных значений δ_0 , η_{10} , η_{20} :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= C_{1000}\delta_0 + C_{0100}\eta_{10} + C_{0010}\eta_{20} + C_{0001}\mu + \\ &\quad + C_{0002}\mu^2 + \dots, \\ \eta_1 &= D_{1000}\delta_0 + D_{0100}\eta_{10} + D_{0010}\eta_{20} + \\ &\quad + D_{0001}\mu + D_{0002}\mu^2 + \dots, \\ \eta_2 &= E_{1000}\delta_0 + E_{0100}\eta_{10} + E_{0010}\eta_{20} + \\ &\quad + E_{0001}\mu + E_{0002}\mu^2 + \dots \end{aligned} \right\} (4.51)$$

с начальными условиями $C_{1000}(0) = D_{0100}(0) = E_{0010}(0) = 1$ и $C_{jkl_s}(0) = D_{jkl_s}(0) = E_{jkl_s}(0) = 0$ для остальных значений индексов jkl_s .

Подставляя (4.51) в (4.50), получаем рекуррентные дифференциальные уравнения, вполне аналогичные уравнениям (4.38) и отличающиеся от них только тем, что вместо R , S_1 , S_2 всюду стоит \bar{R} , \bar{S}_1 , \bar{S}_2 . Значения \bar{R}'_{μ} , $\bar{R}''_{\mu\mu}$, $\bar{R}''_{\delta\mu}$, $\bar{R}''_{\eta_1\mu}$, $\bar{R}''_{\eta_2\mu}$, $\bar{S}'_{1\mu}$, $\bar{S}'_{2\mu}$ могут быть получены из соответствующих значений R'_{μ} , $R''_{\mu\mu}$, ... по формулам (4.39), если в них α_{jt} ,

входящие в выражения для f_j , заменить через β_{jt} . Кроме того:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}'_{1\eta_1}(0, s, 0, 0, 0) &= \sigma, & \bar{S}'_{1\eta_2}(0, s, 0, 0, 0) &= 0, \\ \bar{S}'_{2\eta_1}(0, s, 0, 0, 0) &= 0, & \bar{S}'_{2\eta_2}(0, s, 0, 0, 0) &= \nu. \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Из рекуррентных уравнений, принимая во внимание начальные условия, получаем:

$$\left. \begin{aligned} C_{1000} &= 1, & C_{0100} &= C_{0010} = D_{1000} = D_{0010} = \\ & & &= E_{1000} = E_{0100} = 0, \\ D_{0100} &= e^{\sigma s}, & E_{0010} &= e^{\nu s}, & D_{0001} &= e^{\sigma s} \int_0^s e^{-\sigma \xi} \bar{S}'_{1\mu} d\xi, \\ E_{0001} &= e^{\nu s} \int_0^s e^{-\nu \xi} \bar{S}'_{2\mu} d\xi, & C_{0001} &= \int_0^s \bar{R}'_{\mu} d\xi, \\ C_{0002} &= \int_0^s \left(\frac{1}{2} \bar{R}''_{\mu\mu} + \bar{R}''_{\delta\mu} C_{0001} + \bar{R}''_{\eta_1\mu} D_{0001} + \bar{R}''_{\eta_2\mu} E_{0001} \right) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Полагая в (4.51) $s = \tau$, где $\tau = \frac{2\pi}{b}$ — период на кривой C_{h_0} , получаем в окрестности точки $(0, 0, 0)$ „функцию соответствия“:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_0 + C_{0001}(\tau) \mu + C_{0002}(\tau) \mu^2 + \mu \bar{F}_1(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu), \\ \eta_1 &= D_{0100}(\tau) \eta_{10} + D_{0001}(\tau) \mu + \mu \bar{F}_2(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu), \\ \eta_2 &= E_{0010}(\tau) \eta_{20} + E_{0001}(\tau) \mu + \mu \bar{F}_3(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu). \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Сопоставляя (4.28) и (4.54), так же как и раньше, находим связь между α_{β} и коэффициентами C_{0001} и C_{0002} . Для $L(\lambda_0)$ получаем выражение (4.44), где, вместо D_{0001} и E_{0001} нужно подставить их значения из (4.53) и заменить всюду α_{jt} через β_{jt} . Так же, как и в случаях систем двух и трех уравнений, первое слагаемое в выражении для $L(\lambda_0)$ отлично от нуля только для членов *третьего* порядка в разложениях P_j , а второе слагаемое отлично от нуля только для членов *второго* порядка в разложениях P_j .

§ 3. Выражение для $l(\lambda_0)$ через коэффициенты исходной системы

Пусть для системы (4.1) выполняются условия $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$ (для определенности пусть $\|a_j^{(i)}\| \neq 0$, $j, i = 1, 2, 3$), $s = 0$.

При этом характеристическое уравнение системы (4.1) имеет один нулевой корень и остальные с отрицательными действительными частями.

Ищем решение линейной системы, соответствующей системе (4.1), в виде:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0.$$

Находим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} \end{vmatrix}, & \beta &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} \end{vmatrix}, \\ \gamma &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} \end{vmatrix}, & \delta &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned} \right\} (4.55)$$

Вводим вместо x_4 новое переменное $z = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$, тогда система (4.1) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \left[a_1^{(i)} - \frac{\alpha}{\delta} a_4^{(i)} \right] x_1 + \left[a_2^{(i)} - \frac{\beta}{\delta} a_4^{(i)} \right] x_2 + \\ &+ \left[a_3^{(i)} - \frac{\gamma}{\delta} a_4^{(i)} \right] x_3 + \frac{z}{\delta} a_4^{(i)} + \dots = X_i(x_1, x_2, x_3, z), \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha P_{1z} + \beta P_{2z} + \gamma P_{3z} + \delta P_{4z} + \dots = Z(x_1, x_2, x_3, z),$$

где P_{jz} — члены второго порядка в разложениях правых частей системы (4.1), в развернутом виде представленные в (4.15).

Определяя из системы $X_i = 0$ переменные x_1, x_2, x_3 , как голоморфные функции z (это всегда возможно в силу сделанных предположений о характере корней характеристического уравнения *), получаем:

$$x_1 = \sigma_1 z + \dots, \quad x_2 = \sigma_2 z + \dots, \quad x_3 = \sigma_3 z + \dots,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = -1 \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix}, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Постоянная $l(\lambda_0)$ есть коэффициент при z^2 в разложении $Z(x_1, x_2, x_3, z)$ по степеням z . Находим отсюда для $l(\lambda_0)$ выражение:

$$\left. \begin{aligned} l(\lambda_0) &= \alpha \left\{ a_{11}^{(1)} \sigma_1^2 + a_{22}^{(1)} \sigma_2^2 + a_{33}^{(1)} \sigma_3^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8^3} a_{44}^{(1)} (1 - \alpha\sigma_1 - \beta\sigma_2 - \gamma\sigma_3)^2 + \frac{2}{8} (a_{14}^{(1)} \sigma_1 + \right. \\ &\quad \left. + a_{24}^{(1)} \sigma_2 + a_{34}^{(1)} \sigma_3) (1 - \alpha\sigma_1 - \beta\sigma_2 - \gamma\sigma_3) + \right. \\ &\quad \left. + 2 (a_{12}^{(1)} \sigma_1 \sigma_2 + a_{13}^{(1)} \sigma_1 \sigma_3 + a_{23}^{(1)} \sigma_2 \sigma_3) \right\}_1 + \\ &\quad \left. + \beta \{ \dots \}_2 + \gamma \{ \dots \}_3 + \delta \{ \dots \}_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Выражения в трех последних скобках отличаются от выражения в первой скобке только верхним индексом коэффициентов a_{jk} (значение индекса указано внизу скобки); значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ даны в (4.55) и (4.56).

* Ляпунов, стр. 125.

§ 4. Примеры

1. Однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией

Рассмотрим однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией (рис. 47). Приближенные уравнения движения такой системы имеют вид ^[82]:

$$\left. \begin{aligned} A_0 \ddot{x} - C\omega \dot{y} - \bar{p}bx &= -\gamma'' \dot{x} + M_{\omega}, \\ J_0 \ddot{y} + C\omega \dot{x} - Pcy &= -\gamma' \dot{y}, \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

где

x — угол поворота рамы;

y — угол отклонения вагона от вертикали;

A_0, J_0 — приведенные моменты инерции;

C — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии;

ω — собственная угловая скорость гироскопа;

P — вес всей системы (без груза E);

\bar{p} — вес груза E ;

c — расстояние от центра тяжести всей системы (без груза E) до рельса;

b — расстояние от оси AB до груза E ;

γ' — коэффициент вязкого трения для вагона;

γ'' — коэффициент вязкого трения для рамы;

M_{ω} — сервомомент, осуществляющий стабилизацию.

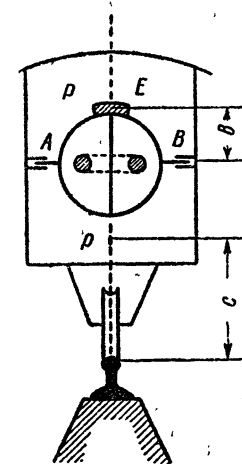


Рис. 47. Однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией.

Рассмотрим сервомомент вида:

$$M_{\omega} = (\alpha' - \beta' \dot{x}^2) \dot{x} \quad (0 < \gamma'' \leq \alpha').$$

Обозначая коэффициент результирующего трения через

$$\delta' = \alpha' - \gamma'' \quad (\delta' > 0)$$

и переходя к безразмерным переменным

$$x_1 = x; \quad x_2 = \frac{\sqrt{A_0 \bar{p} b}}{C\omega} y; \quad x_3 = \sqrt{\frac{A_0}{\bar{p} b}} \dot{x};$$

$$x_4 = \frac{C\omega}{\bar{p} b} \dot{y}; \quad \tau = \sqrt{\frac{\bar{p} b}{A_0}} t,$$

получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_4; \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= x_1 + \delta x_3 + x_4 - \delta \beta x_3^2; \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= \zeta x_2 - \chi x_3 - \nu x_4; \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

где

$$\delta = \frac{\nu'}{\sqrt{A_0 \bar{p} b}}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\delta} \cdot \frac{\bar{p} b}{A_0}, \quad \zeta = \frac{PcC^2\omega^2}{(\bar{p} b)^2 J_0^2},$$

$$\chi = \frac{C^2\omega^2}{J_0 \bar{p} b}, \quad \nu = \frac{\gamma' \sqrt{A_0}}{J_0 \sqrt{\bar{p} b}}$$

— безразмерные параметры.

Составляя характеристическое уравнение, находим, что

$$p = \nu - \delta, \quad q = \chi - \delta\nu - \zeta - 1, \quad r = \zeta\delta - \nu, \quad s = \zeta. \quad (4.60)$$

Условия Раута — Гурвица для системы (4.59) дают неравенства

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s > 0, \quad R = pqr - sp^2 - r^2 > 0,$$

совместные при $\zeta > 1$ и ограничивающие область устойчивости.

Легко проверить, что нумерация переменных в системе (4.59) введена таким образом, что условия (4.12) выполняются.

В самом деле:

$$\begin{vmatrix} -bt & 0 & 1 \\ 0 & -bt & 0 \\ 1 & 0 & \delta - bt \end{vmatrix} = b(b^2 + 1)t - \delta b^2 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} -x_3 & 0 & 1 \\ 0 & \delta - x_3 & 1 \\ \zeta & -x & -\nu - x_3 \end{vmatrix} = -x_3^3 + (\delta - \nu)x_3^2 +$$

$$+ (\zeta - x + \delta\nu)x_3 - \zeta\delta \neq 0^*.$$

Вычислим знак $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$. Так как система (4.59) не имеет членов второго порядка, выражение для $L(\lambda_0)$ принимает простой вид:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}),$$

где

$$A_{klg}^{(j)} = -\frac{\delta\beta}{\Delta_0} \alpha_{jk} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3g}. \quad (4.61)$$

Для α_{jk} из (4.14) и (4.59) находим:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0, & \alpha_{12} &= -b, & \alpha_{13} &= m(x - \zeta - n^2 - m^2 - \delta\nu) + \zeta\delta, \\ \alpha_{14} &= n(m^2 + n^2 + \delta\nu + \zeta - x), & \alpha_{21} &= -(1 + b^2), & \alpha_{22} &= b\delta, \\ \alpha_{23} &= -x, & \alpha_{24} &= 0, & \alpha_{31} &= -b^2, & \alpha_{32} &= 0, \\ \alpha_{34} &= -n\delta, & \alpha_{33} &= m^2 - n^2 + m\nu - \zeta, & \alpha_{41} &= \delta b^2, \\ \alpha_{42} &= b(1 + b^2), & \alpha_{43} &= -mx, & \alpha_{44} &= mx. \end{aligned}$$

Из (4.61) в силу того, что $\alpha_{32} = 0$, находим:

$$A_{222}^{(2)} = A_{112}^{(2)} = A_{122}^{(1)} = 0,$$

т. е.

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi b\delta\beta}{4\Delta_0} \alpha_{13}.$$

* В том, что $K(x) \equiv x^3 - (\delta - \nu)x^2 - (\zeta - x + \delta\nu)x + \zeta\delta$ не обращается в нуль при $x = x_3$, можно убедиться следующим образом: если $K(x_3) = 0$, то и $K(x_4) = 0$ (x_4 — сопряженный корень с x_3). Но, согласно (4.6) и (4.60), $x_3 + x_4 = 2m = -p = -(\nu - \delta)$. Пусть теперь x_0 — третий корень уравнения $K(x) = 0$. Тогда $x_0 + x_3 + x_4 = \delta - \nu$ и следовательно $x_0 = 0$, что, однако, невозможно, так как свободный член $\zeta\delta \neq 0$.

Вычисляя α'_{18} (адъюнкту элемента α_{81}) и воспользовавшись для упрощения полученного выражения соотношениями*:

$$m = \frac{\delta - \nu}{2}, \quad b^2 = \frac{r}{p} = \frac{\zeta \delta - \nu}{\nu - \delta}, \quad n^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4} = \frac{\zeta - m^2 b^2}{b^2},$$

а также уравнением кривой $R=0$, окончательно получаем:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi l \delta \beta b^6 \nu}{4\Delta_0} \left\{ \chi - \left[1 + \left(\frac{\zeta \delta - \nu}{\nu - \delta} \right)^2 \right] - \delta^2 \zeta \right\}.$$

Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в фигурных скобках, так как $\Delta_0 > 0$ (знак Δ_0 всегда легко определить, так как все вычисления ведутся таким образом, что Δ_0 не может обратиться в нуль и, следовательно, достаточно определить знак при подходящим образом выбранных частных значениях параметров).

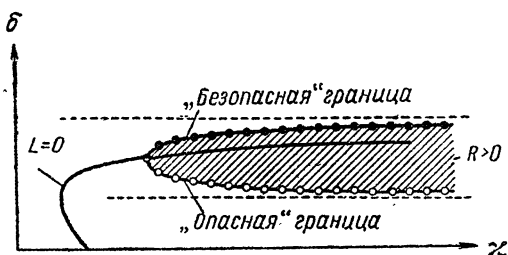


Рис. 48. Пространство параметров δ , χ при фиксированных ζ , β , ν .

На рис. 48 в плоскости параметров χ , δ изображена часть кривой $R=0$, проходящая внутри области $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$, и кривая $L(\lambda_0) = 0$. На той части кривой $R=0$, которая расположена выше кривой $L(\lambda_0) = 0$, $L(\lambda_0)$ — отрицательно и, следовательно, нарушение границы $R=0$ за счет *увеличения* параметра δ приводит к достаточно малым автоколебаниям вагона, если малы нарушения границы („безопасная“

* Для ν не слишком большого ($\delta \nu < \frac{4\zeta}{\zeta + 1}$) выполняется неравенство $4s - rp > 0$. Мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда характеристическое уравнение не имеет действительных корней.

часть границы $R=0$). На другой части кривой $R=0$, расположенной ниже кривой $L(\lambda_0)=0$, $L(\lambda_0)$ будет положительным и, следовательно, нарушение границы $R=0$ за счет *уменьшения* параметра δ (сколь угодно малое нарушение) приводит к раскачиванию вагона с возрастающей амплитудой („опасная“ часть границы $R=0$).

2. Непрямое регулирование при наличии жесткой обратной связи

Рассмотрим непрямо́е регулирование скорости центробежным регулятором, связанным с сервомотором, имеющим жесткую обратную связь (рис. 49), считая линейными характеристики всех элементов, кроме характеристики сервомотора.

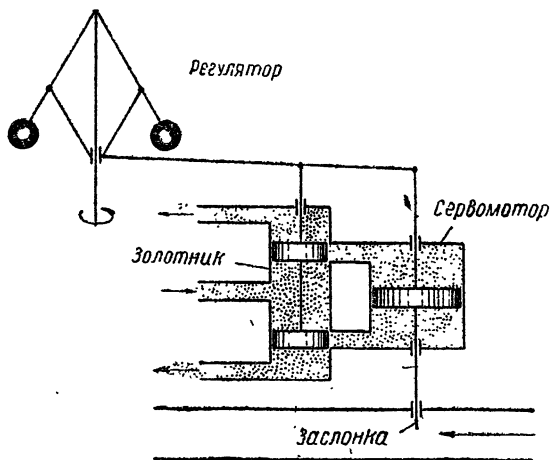


Рис. 49. Центробежный регулятор с сервомотором и жесткой обратной связью.

Уравнения движения системы как известно (см., например, [81]) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 T_a \dot{\varphi} &= -\mu && \text{— уравнение машины;} \\
 T_r \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta &= \varphi && \text{— уравнение регулятора;} \\
 \dot{\mu} &= f(\sigma) && \text{— уравнение сервомотора; (4.62)} \\
 \sigma &= \eta - \mu && \text{— уравнение золотника,}
 \end{aligned}$$

где T_a , T_r , T_k — параметры, имеющие размерность времени; δ — коэффициент неравномерности регулятора; φ , η , μ , σ — безразмерные переменные: φ — относительное отклонение регулируемой величины, η — относительное смещение муфты регулятора, μ — относительное смещение поршня сервомотора, σ — степень открытия золотника.

Характеристику сервомотора возьмем в виде:

$$f(\sigma) = S_1\sigma + S_3\sigma^3$$

и проследим влияние кривизны характеристики (знака коэффициента S_3) на поведение системы вблизи границы области устойчивости, выделяемой условиями Раута — Гурвица*.

Вводим безразмерное время τ и новые безразмерные переменные x_1 , x_2 , x_3 , x_4 :

$$\tau = \frac{\delta}{T_k} t, \quad x_1 = \eta, \quad x_2 = \frac{\varphi}{\delta}, \quad x_3 = \sigma, \quad x_4 = \dot{\eta}$$

и исключаем μ . Система (4.62) запишется тогда в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= -\kappa x_1 + \kappa x_3 \\ \dot{x}_3 &= -S x_3 + x_4 - S' x_3^3 \\ \dot{x}_4 &= -\zeta x_1 + \zeta x_2 - \zeta x_4 \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

где

$$\kappa = \frac{T_k}{\delta^2 T_a}, \quad \zeta = \frac{T_k^2}{\delta T_r^2}, \quad S = \frac{S_1 T_k}{\delta}, \quad S' = \frac{S_3 T_k}{\delta}.$$

Условия Раута — Гурвица дают для системы (4.63) неравенства

$$p \equiv \zeta + S > 0, \quad q \equiv \zeta(1 + S) > 0, \quad r \equiv \zeta S > 0, \quad s \equiv S\zeta\kappa > 0,$$

$$R \equiv pqr - sp^2 - r^2 \equiv \zeta S [\zeta(\zeta + \zeta S + S^2) - \kappa(\zeta + S)^2] > 0.$$

* Систему (4.62) при весьма общих предположениях о виде характеристики рассматривал А. И. Лурье [88], которым были получены некоторые достаточные условия устойчивости в «большом».

Последнее из них при фиксированном $S > 0$ выделяет в плоскости параметров $x, \frac{1}{\zeta}$ область, изображенную на рис. 50 и 51.

Нумерация переменных в системе (4.63) введена таким образом, что условия (4.12) выполняются. В самом деле:

$$\begin{vmatrix} -bi & 0 & 0 \\ -x & -bi & x \\ 0 & 0 & -S-bi \end{vmatrix} = b^2 S - b^3 i \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} -m-ni & x & 0 \\ 0 & -S-m-ni & 1 \\ 0 & 0 & -\zeta \end{vmatrix} =$$

$$= \zeta [x + n^2 - m^2 - mS - n(S + 2m)i] =$$

$$= \zeta (x + n^2 - m^2 - mS + n\zeta i) \neq 0.$$

Так как правая часть системы (4.63) не имеет членов второго порядка, то выражение для $L(\lambda_0)$ принимает вид:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}),$$

где

$$A_{kls}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \alpha_{j3} \alpha_{333}^{(3)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s} \quad \text{и} \quad a_{333}^{(3)} = -S'. \quad (4.64)$$

Для $\alpha_{j\ell}$ из (4.14) (4.63), используя соотношения

$$\zeta + S = -2m, \quad b^2 = \frac{r}{p} = \frac{\zeta S}{\zeta + S},$$

$$n^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4} = -m^2 - 2\chi m \quad (4.65)$$

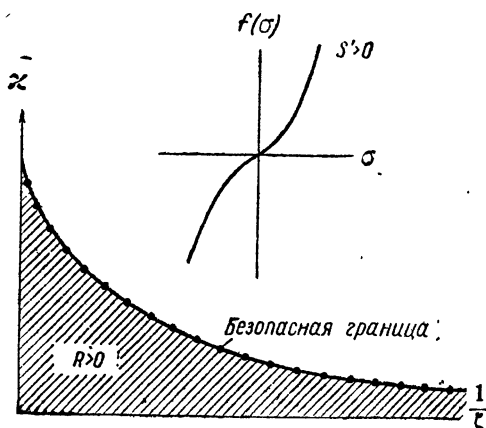
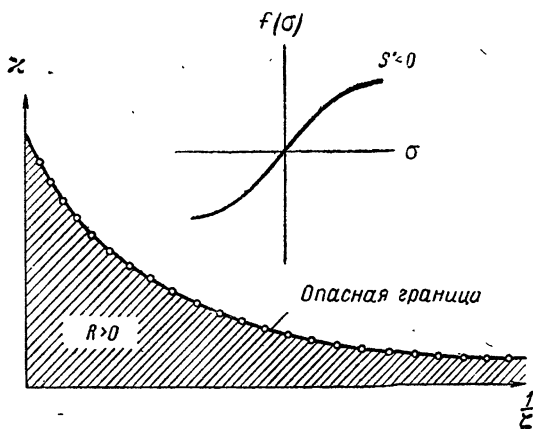
и уравнение кривой $R=0$, находим:

$$\alpha_{11} = \zeta b^2, \quad \alpha_{12} = -bS, \quad \alpha_{13} = \frac{\zeta^2}{2} - \zeta x, \quad \alpha_{14} = -\frac{n\zeta^2}{2m},$$

$$\alpha_{21} = -xS, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{23} = \frac{\zeta S}{2m}, \quad \alpha_{24} = 0, \quad \alpha_{31} = -b^2,$$

$$\alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = -\zeta(x+m), \quad \alpha_{34} = n\zeta, \quad \alpha_{41} = -Sb^2,$$

$$\alpha_{42} = b^3, \quad \alpha_{43} = \zeta [n^2 - (S+m)(x+m)], \quad \alpha_{44} = n\zeta(x-\zeta).$$

Рис. 50. Пространство параметров $z, \frac{1}{\tau}$ ($S' > 0$).Рис. 51. Пространство параметров $z, \frac{1}{\tau}$ ($S' < 0$).

Из (4.64) в силу того, что $\alpha_{32} = 0$, находим:

$$A_{222}^{(2)} = A_{112}^{(2)} = A_{122}^{(1)} = 0,$$

т. е.

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi b^5 S'}{4\Delta_0} \alpha'_{13}.$$

Вычисляя α'_{13} (адьюнкту элемента α_{31}) и пользуясь для упрощения соотношениями (4.65), получаем:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi b^5 S'}{4\Delta_0} \cdot \frac{\chi^2 S^2 n b}{4m^2 (\zeta + S)} \cdot [\zeta^2 + (\zeta + S)(x - \zeta)].$$

Легко проверить, что $\Delta_0 < 0$, вычисляя значение Δ_0 для подходящим образом выбранных значений параметров [на границе $R = 0$, в силу условия (4.12), Δ_0 не обращается в нуль]. Легко также проверить, что множитель в квадратных скобках не обращается в нуль на границе области устойчивости. В самом деле, находим из условия $L = 0$:

$$x = x_1(\zeta, S) = \zeta - \frac{\zeta^2}{\zeta + S}, \quad (4.66)$$

а из условия $R = 0$:

$$x = x_2(\zeta, S) = \frac{\zeta(\zeta + \zeta S + S^2)}{(\zeta + S)^2}. \quad (4.67)$$

Сравнивая правые части (4.66) и (4.67), видим, что всегда $x_2 > x_1$ и, следовательно, кривая $L = 0$ в плоскости параметров x, ζ не пересекает границы области устойчивости*.

Таким образом, знак $L(\lambda_0)$ определяется только знаком множителя S' , характеризующего кривизну характеристики сервомотора [знак $L(\lambda_0)$ противоположен знаку S']. Если $S' > 0$ и, следовательно, $L(\lambda_0) < 0$, то граница $R = 0$ области устойчивости будет „безопасная“ (рис. 50); если же $S' < 0$, то $L(\lambda_0) > 0$ и граница $R = 0$ будет, наоборот, „опасная“ (рис. 51). В первом случае при нарушении границы области устойчивости возникнут лишь малые автоколебания, во втором — раскачивание регулятора.

* Легко видеть, что выражение в квадратных скобках на границе $R = 0$ положительно. Действительно, заменив в этом выражении x на x_2 [из (4.67)], приведем его к виду: $\frac{\zeta^2}{\zeta + S}$. В силу условий Раута — Гурвица это выражение положительно.

3. Судно с гироскопическим стабилизатором

Уравнения движения такой системы (рис. 52) будут иметь вид [34, 82]:

$$A_0 \ddot{x} - C\omega \dot{y} + Nx = -\gamma' \dot{x} + M_\omega,$$

$$J_0 \ddot{y} + C\omega \dot{x} + Ly = -\gamma'' \dot{y},$$

где x — угол поворота оси гироскопа; y — угол крена судна, J_0 — момент инерции корабля относительно продольной оси, A_0 — момент инерции гироскопа с рамой относительно оси рамы, L — коэффициент восстанавливающего момента судна, N — коэффициент момента силы тяжести гироскопической системы, C — момент инерции гироскопа относительно собственной оси вращения, ω — угловая скорость гироскопа, γ' — коэффициент затухания гироскопа, γ'' — коэффициент затухания судна, M_ω — сервомомент.

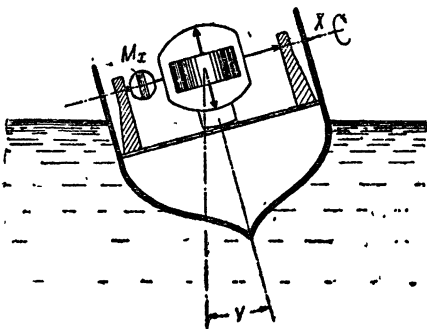


Рис. 52. Судно с гироскопическим стабилизатором.

Рассмотрим сервомомент вида:

$$M_\omega = \alpha' \dot{x} - \beta' \dot{x}^3 \quad (\alpha' > 0, \beta' > 0).$$

Переходя к безразмерным переменным

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{\sqrt{A_0 N}}{C\omega} \dot{y},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{A_0}{N}} \dot{x}, \quad x_4 = \frac{C\omega}{N} \dot{y},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{N}{A_0}} t,$$

получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_4, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -x_1 + \delta x_3 + x_4 - \delta\beta x_3^3, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -\zeta x_2 - \kappa x_3 - \nu x_4, \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

где:

$$\delta = \frac{\alpha' - \gamma''}{\sqrt{NA_0}}, \quad \beta = \frac{\beta'N}{(\alpha' - \gamma'')A_0}, \quad \zeta = \frac{Pl_1C^2\omega^2}{J_0N^2},$$

$$\kappa = \frac{C^2\omega^2}{J_0N}, \quad \nu = \frac{\gamma'}{J_0} \sqrt{\frac{A_0}{N}}$$

— безразмерные параметры.

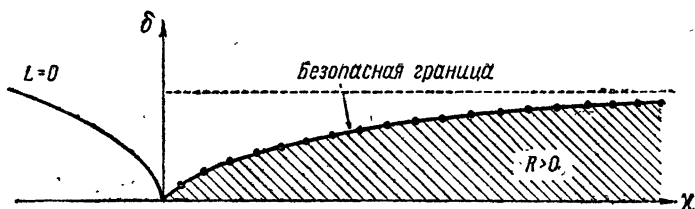


Рис. 53. Пространство параметров δ, χ .

Составляя характеристическое уравнение, находим, что

$$p = \nu - \delta, \quad q = \chi - \delta\nu + \zeta + 1, \quad r = \nu - \delta\zeta, \quad s = \zeta.$$

Условия Раута — Гурвица дают для системы (4.68) неравенства:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s > 0, \quad R = pqr - sp^2 - r^2 > 0,$$

ограничивающие область, изображенную на рис. 53. Условия (4.12) выполняются.

Вычислим знак $L(\lambda_0)$ на границе $R = 0$.

Ограничиваясь случаем комплексных корней, для α_{ji} из (4.14) и (4.68) находим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 0, & \alpha_{12} &= -b, \\ \alpha_{13} &= m(x + \zeta - n^2 - m^2 - \delta\nu) - \zeta\delta, \\ \alpha_{14} &= n(m^2 + n^2 + \delta\nu - \zeta - x), & \alpha_{21} &= 1 - b^2, \\ \alpha_{22} &= b\delta, & \alpha_{23} &= x, & \alpha_{24} &= 0, & \alpha_{31} &= -b^2, \\ \alpha_{32} &= 0, & \alpha_{33} &= n^2 - m^2 - m\nu - \zeta, & \alpha_{34} &= n\delta, \\ \alpha_{41} &= b^2\delta, & \alpha_{42} &= b(b^2 - 1), & \alpha_{43} &= mx, & \alpha_{44} &= -nx. \end{aligned} \right\} (4.69)$$

Для $L(\lambda_0)$ из (4.68), (4.69), (4.16) и (4.21) находим

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi b^5 \delta \beta}{4\Delta_0} \alpha'_{13}.$$

Вычисляя α'_{13} , получаем окончательно

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi b^5 n \beta \delta x}{4\Delta_0} \left\{ x + \left[\left(\frac{\nu - \zeta\delta}{\nu - \delta} \right)^2 - 1 \right]^2 - \zeta\delta^2 \right\}.$$

Для $\delta > 0$ на границе $R=0$ области устойчивости выражение в фигурных скобках положительно* и $\Delta_0 < 0$ (в последнем можно убедиться, определив знак Δ_0 , например, для значения параметра $\zeta=1$). Таким образом, всегда $L(\lambda_0) < 0$ и, следовательно, граница $R=0$ „безопасная“.

* Действительно, поверхность $R=0$ дается уравнением:

$$x = \nu\delta \left[\frac{(1-\zeta)^2}{(\nu-\delta)(\nu-\zeta\delta)} + 1 \right].$$

Подставляя x в выражение в фигурных скобках, представим последнее в следующем виде:

$$\left[\left(\frac{\nu - \zeta\delta}{\nu - \delta} \right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{\nu\delta(1-\zeta)^2}{(\nu-\delta)(\nu-\zeta\delta)} + \delta(\nu - \zeta\delta).$$

Это выражение положительно в силу условий Рауга—Гурвица и $\delta > 0$.

4. Система с неконсервативными силами, зависящими от положения

Рассмотрим плоское движение приведенной массы m , на которую действуют:

a) — квазиупругая сила, пропорциональная смещению из положения равновесия;

b) — сила вязкого трения, пропорциональная скорости;

c) — неконсервативная сила, зависящая от положения массы m и способная возбудить автоколебания.

К такого рода задаче может быть сведена задача о колебаниях струны в струе воздуха [85].

Уравнения движения, к которым пришел Стрелков, имеют вид:

$$m\ddot{\vec{R}} = -\delta'\dot{\vec{R}} - k\vec{R} + \vec{F}, \quad (4.70)$$

где $\vec{F} = [\vec{K} \times \vec{R}] (\alpha'\rho + \gamma'\rho^3)$ (\vec{K} — единичный вектор, нормальный к плоскости xu ; \vec{R} — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору, лежащему в плоскости xu ; ρ — модуль радиуса-вектора; α' и γ' — некоторые коэффициенты).

Стрелков исследовал эти уравнения методом Ван-дер-Поля в предположении малости α' и γ' .

Исследуем теперь поведение системы вблизи границ области устойчивости (не считая α' и γ' малыми).

Переходя к декартовым координатам, вводя безразмерное время $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t$ и обозначив $x = x_1$, $y = x_2$, $\dot{x} = x_3$, $\dot{y} = x_4$, запишем (4.70) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3; \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_4; \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -x_1 - \alpha x_2 - \delta x_3 - \gamma x_2^3 - \gamma x_1^2 x_2; \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= \alpha x_1 - x_2 - \delta x_4 + \gamma x_1^3 + \gamma x_1 x_2^2; \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

где

$$\delta = \frac{\delta'}{\sqrt{km}}, \quad \alpha = \frac{\alpha'}{k}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{k}.$$

Условия Раута — Гурвица:

$$p = 2\delta > 0, \quad q = 2 + \delta^2 > 0, \quad r = 2\delta > 0, \quad s = 1 + \alpha^2 > 0$$

$$R \equiv pqr - sp^2 - r^2 = 4\delta^2(\delta^2 - \alpha^2) > 0$$

сводятся к двум:

$$\delta > 0 \quad \text{и} \quad \delta^2 - \alpha^2 > 0.$$

Значения корней характеристического уравнения на границе $R = 0$ суть следующие:

$$x_1 = bl = l, \quad x_2 = -bl = -l, \quad x_3 = m + ni = -\delta + l,$$

$$x_4 = m - ni = -\delta - l.$$

Нумерация уравнений (4.71) введена таким образом, что условия (4.12) выполняются. В самом деле:

$$\begin{vmatrix} -x_1 & 0 & 1 \\ 0 & -x_1 & 0 \\ -1 & -\alpha & -\delta - x_1 \end{vmatrix} = \delta \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} -x_3 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\delta - x_3 & 0 \\ -1 & 0 & -\delta - x_3 \end{vmatrix} = -\delta \neq 0.$$

Вычислим $L(\lambda_0)$ на границе $R = 0$. Для коэффициентов α_{jk} из (4.14) и (4.71) имеем:

$$\alpha_{11} = -\alpha, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = \delta, \quad \alpha_{14} = 0,$$

$$\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = -\delta, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{24} = -\alpha,$$

$$\alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = \alpha, \quad \alpha_{33} = -\alpha^2, \quad \alpha_{34} = -\delta,$$

$$\alpha_{41} = -\delta, \quad \alpha_{42} = 0, \quad \alpha_{43} = -\alpha, \quad \alpha_{44} = \alpha\delta.$$

Так как система (4.71) не содержит членов второго измерения, то выражение для $L(\lambda_0)$ принимает вид:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}).$$

Вычисляя $A_{kl}^{(j)}$ по формулам (4.16), находим:

$$A_{111}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_0} a_{111}^{(4)} \alpha_{11}^3 \alpha'_{14}, \quad A_{222}^{(2)} = \frac{1}{\Delta_0} a_{222}^{(3)} \alpha_{22}^3 \alpha'_{23},$$

$$A_{112}^{(2)} = \frac{1}{\Delta_0} a_{112}^{(3)} \alpha_{11}^2 \alpha_{22} \alpha'_{23}, \quad A_{122}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_0} a_{122}^{(4)} \alpha_{11} \alpha_{22}^2 \alpha'_{14},$$

где

$$a_{111}^{(4)} = \gamma, \quad a_{222}^{(3)} = -\gamma, \quad a_{112}^{(3)} = -\frac{\gamma}{3},$$

$$a_{221}^{(4)} = \frac{\gamma}{3}, \quad \alpha'_{14} = \delta(\alpha^2 + \delta^2), \quad \alpha'_{23} = -\alpha(\alpha^2 + \delta^2)$$

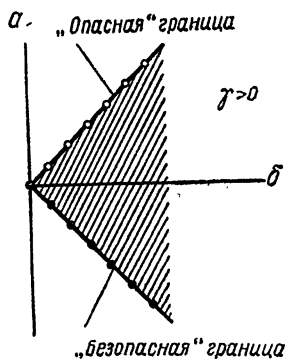


Рис. 54. Пространство параметров α, δ .

и

$$\Delta_0 = -[\alpha^4 \delta^2 + (\alpha^2 + \delta^2)^2],$$

откуда для $L(\lambda_0)$ получаем:

$$L(\lambda_0) = \frac{\pi \alpha \gamma \delta}{12 \Delta_0} (\alpha^2 + \delta^2)^2.$$

Так как $\delta > 0$, то знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком произведения $\alpha\gamma$ [свойствами характеристики $F = \alpha'p + \gamma'p^3 = k(\alpha p + \gamma p^3)$].

На рис. 54 изображена область Раута—Гурвица для фиксированного $\gamma > 0$.

В зависимости от знака $\alpha\gamma$, при нарушении границы $R=0$ происходит либо мягкое возникновение автоколебаний ($\alpha\gamma < 0$), либо срыв изображающей точки из состояния равновесия ($\alpha\gamma > 0$).

5. Сложный генератор

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 55.

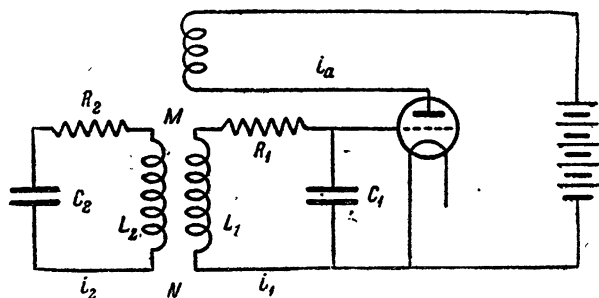


Рис. 55. Сложный генератор.

Пренебрегая реакцией анода и сеточным током, имеем для токов в контурах уравнения:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{c_1} \int_0^t i_1 dt &= N \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_a}{dt}, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{c_2} \int_0^t i_2 dt &= N \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} (4.72)$$

Характеристику лампы примем в виде:

$$i_a = \bar{S} V_1 \left(1 - \frac{V_1^2}{3V_s^2} \right),$$

где \bar{S} („крутизна в нулевой точке“) и V_s („напряжение насыщения“) — константы, а

$$V_1 = \frac{1}{c_1} \int_0^t i_1 dt.$$

Обозначив также

$$V_2 = \frac{1}{c_2} \int_0^t i_2 dt.$$

и вводя безразмерные переменные

$$x = \frac{V_1}{V_s} \sqrt{\frac{M\bar{S}}{M\bar{S} - R_1 C_1}}, \quad y = \frac{V_2}{V_s} \sqrt{\frac{M\bar{S}}{M\bar{S} - R_1 C_1}},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} t,$$

приводим уравнения (4.72) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + x - x_1 \ddot{y} &= \delta (1 - x^2) \dot{x}, \\ \ddot{y} + \zeta y - x_2 \ddot{x} &= -\delta \varepsilon y, \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

где

$$x_1 = \frac{NC_2}{L_1 C_1}, \quad x_2 = \frac{NC_1}{L_2 C_2}, \quad \delta = \frac{M\bar{S} - R_1 C_1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \varepsilon = \frac{R_2 L_1 C_1}{L_2 (M\bar{S} - R_1 C_1)}$$

— безразмерные параметры.

Систему (4.73) можно также переписать в виде одного уравнения четвертого порядка:

$$\sigma \ddot{\ddot{x}} + \delta (\varepsilon - 1) \ddot{\ddot{x}} + (1 + \zeta - \delta^2 \varepsilon) \ddot{x} + \delta (\varepsilon - \zeta) \dot{x} + \zeta x =$$

$$= -\delta [2x^3 + 2\delta \varepsilon x \dot{x}^2 + \ddot{x} x^2 + \delta \varepsilon \ddot{x} x^2 + \zeta x \dot{x}^2 + 6\ddot{x} x \dot{x}],$$

или, окончательно, в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -px_1 - qx_2 - rx_3 - sx_4 - \frac{2\delta}{\sigma} x_8^3 - \frac{2\delta^2 \varepsilon}{\sigma} x_8^2 x_4 - \\ &\quad - \frac{\delta}{\sigma} x_1 x_4^2 - \frac{\delta^2 \varepsilon}{\sigma} x_2 x_4^2 - \frac{\zeta \delta}{\sigma} x_3 x_4^2 - \frac{6\delta}{\sigma} x_2 x_3 x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \\ \dot{x}_4 &= x_3, \end{aligned} \quad (4.74)$$

где

$$x_1 = \ddot{\ddot{x}}, \quad x_2 = \ddot{x}, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = x.$$

Далее:

$$p = \frac{\delta(\varepsilon - 1)}{\sigma}, \quad q = \frac{1 + \zeta - \delta^2 \varepsilon}{\sigma}, \quad r = \frac{\delta(\varepsilon - \zeta)}{\sigma},$$

$$s = \frac{\zeta}{\sigma}, \quad \sigma = 1 - x_1 x_2.$$

Условия Рауга — Гурвица дают для системы (4.74) неравенства:

$$p > 0, q > 0, r > 0, s > 0, R \equiv pqr - p^2s - r^2 > 0.$$

Нумерация переменных в системе (4.74) такова, что условия (4.12) выполняются. В самом деле:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -p - bi & -q & -r \\ 1 & -bi & 0 \\ 0 & 1 & -bi \end{vmatrix} = b^2(p + bi) - r - qbi.$$

Но, так как $b^2 = \frac{r}{p}$ и $R = pqr - sp^2 - r^2 = 0$, то имеем

$$\Delta_1 = (b^2 - q)bi = \frac{(r - pq)bi}{p} = \frac{spb}{r} \neq 0.$$

Также имеем:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -(m + ni) & 0 & 0 \\ 1 & -(m + ni) & 0 \\ 0 & 1 & -(m + ni) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычислим $L(\lambda_0)$ на границе $R = 0$. Из (4.21) получаем:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}).$$

Для α_{jk} из (4.14) и (4.74) находим:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= sb^2, & \alpha_{12} &= 0, & \alpha_{13} &= m^3 - 3mn^2, & \alpha_{14} &= n^3 - 3m^2n, \\ \alpha_{21} &= 0, & \alpha_{22} &= bs, & \alpha_{23} &= m^2 - n^2, & \alpha_{24} &= -2mn, \\ \alpha_{31} &= -s, & \alpha_{32} &= 0, & \alpha_{33} &= m, & \alpha_{34} &= -n, \\ \alpha_{41} &= 0, & \alpha_{42} &= b^3 - bq = \frac{sbp}{r}, & \alpha_{43} &= 1, & \alpha_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Из (4.16), принимая во внимание, что:

$$\begin{aligned} a_{333}^{(1)} &= -\frac{2\delta}{\sigma}, & a_{334}^{(1)} &= -\frac{2\delta^2\epsilon}{3\sigma}, & a_{144}^{(1)} &= -\frac{\delta}{3\sigma}, \\ a_{244}^{(1)} &= -\frac{\delta^2\epsilon}{3\sigma}, & a_{344}^{(1)} &= -\frac{\zeta\delta}{3\sigma}, & a_{284}^{(1)} &= -\frac{\delta}{\sigma}, \end{aligned}$$

находим:

$$A_{111}^{(1)} = \frac{2\delta s^3}{\Delta_0} \alpha'_{11}, \quad A_{222}^{(2)} = -\frac{\delta^2 \epsilon b^3 s^3 p^2}{\sigma r^2 \Delta_0} \alpha'_{21},$$

$$A_{112}^{(2)} = \frac{2\delta^2 \epsilon s^3 b p}{3\sigma r \Delta_0} \alpha'_{21}, \quad A_{132}^{(1)} = \frac{\delta s^3 b^2 p [p(\zeta - b^2) - 6r]}{3\sigma r^2 \Delta_0} \alpha'_{11}$$

и

$$\alpha'_{11} = \frac{nb s}{r^2} (r^2 - sp^2), \quad \alpha'_{21} = -2mns.$$

Подставляя полученные значения в выражение для $L(\lambda_0)$ и воспользовавшись для упрощения результата соотношением $b^2 = \frac{r}{p}$, окончательно получаем:

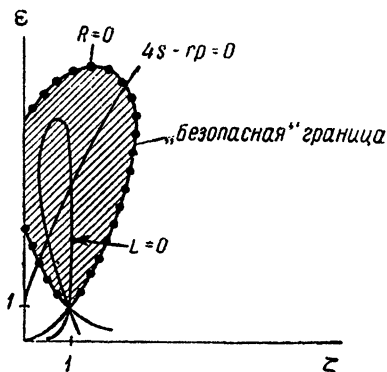
$$L(\lambda_0) = \frac{\pi n s^4 \delta}{4\sigma \Delta_0 r^6} [(r^2 - sp^2)(p\zeta - r) - \delta \epsilon r^2 p^2] =$$

$$= \frac{\pi n s^4 \delta^4}{4\sigma^5 \Delta_0 r^6} \{[\sigma(\epsilon - \zeta)^2 - \zeta(\epsilon - 1)^2](\zeta - 1)\epsilon - \delta^2(\epsilon - \zeta)^2(\epsilon - 1)^2\},$$

где

$$\Delta_0 = bn [(n^2 - b^2)^2 + m^2(m^2 + 2n^2 + 2b^2)] > 0.$$

Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в фигурных скобках. На рис. 56 в плоскости параметров ϵ, ζ изображена часть кривой:



$$R = \frac{\delta^2}{\sigma^5} [(\epsilon - 1)(\epsilon - \zeta)(1 + \zeta - \delta^2 \epsilon) - \zeta(\epsilon - 1)^2 - \sigma(\epsilon - \zeta)^2] = 0,$$

Рис. 56. Пространство параметров ϵ, ζ .

проходящая внутри области $p > 0, q > 0, r > 0, s > 0$, а также кривая $L(\lambda_0) = 0$. Кривые $R = 0$ и $L = 0$ пересекаются в точке (1,1) (для каждой из кривых это кратная точка), причем кривая $L = 0$ проходит внутри области устойчивости, ограниченной петлей кривой $R = 0$. $L(\lambda_0)$ повсюду на границе области устойчивости отрицательно.

Проведенное вычисление выражения $L(\lambda_0)$ выполнено в предположении, что на границе $R=0$ вторая пара корней (кроме пары чисто мнимых) комплексная. Граница комплексных корней на кривой $R=0$ дается точками пересечения с кривой $4s - rp = \frac{1}{\sigma^2} [4\sigma\zeta - \delta^2(\varepsilon - 1)(\varepsilon - \zeta)] = 0$. В плоскости переменных ε, ζ — это гипербола, пересекающая границу $R=0$ области устойчивости, если δ невелико. Вычисление $L(\lambda_0)$ для случая, когда вторая пара корней на границе $R=0$ действительная, даёт для $L(\lambda_0)$ выражение, совпадающее с только что вычисленным с точностью до постоянного положительного множителя.

Таким образом, граница $R=0$ области устойчивости в обоих случаях „безопасная“. При нарушении границы области устойчивости изменением параметров ε и δ — происходит мягкое возникновение автоколебаний.

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ОБЩЕМУ СЛУЧАЮ СИСТЕМЫ n УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Совершенно подобным же образом, как и для систем двух, трех и четырех уравнений, можно было бы провести аналогичные вычисления для $L(\lambda_0)$ в общем случае системы n уравнений.

Однако для $n > 4$ возникает принципиальное затруднение, значительно обесценивающее эти формулы.

В рассмотренных случаях систем двух, трех и четырех уравнений оказывалось возможным на границе $R=0$ найти простые явные выражения для корней характеристического уравнения. Это оказывается невозможным для случая $n > 4$. Поэтому приходится при применении этих формул или ограничиваться теми случаями распада характеристического уравнения, когда на границе $R=0$ его корни могут быть легко определены, или вычислять $L(\lambda_0)$ для тех случаев, когда можно найти с желаемой точностью приближенные значения корней характеристического уравнения на границе $R=0$.

Мы не будем поэтому рассматривать общий случай системы n уравнений, тем более, что выражение для $L(\lambda_0)$ становится в общем случае трудно обозримым, и ограничимся тем частным случаем системы n уравнений, когда разложения правых частей *не содержат членов второго порядка* *. В этом случае для $L(\lambda_0)$ можно дать замкнутое выражение.

* Такого рода системы часто возникают, когда характеристики различных устройств аппроксимируются кривыми, не содержащими членов четных степеней.

Рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} = a_1^{(t)}x_1 + a_2^{(t)}x_2 + \dots + a_n^{(t)}x_n + P_t(x_1, \dots, x_n), \\ (t = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (5.1)$$

где $P_t(x_1, \dots, x_n)$ не содержат членов ниже второго измерения. Характеристическое уравнение, соответствующее системе (5.1):

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

имеет, как нетрудно показать, одну пару чисто мнимых корней и остальные корни — с отрицательной действительной частью, если при выполнении условий Раута — Гурвица

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_{n-2} > 0, D_n > 0$$

имеет место равенство:

$$D_{n-1} \equiv R \equiv \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-3} & p_{2n-4} & p_{2n-5} & p_{2n-6} & \dots & p_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть характеристическое уравнение имеет на границе $R = 0$ корни:

$$bl, -bl, m, \pm n, i, \sigma_k.$$

Общее решение линейной системы, соответствующей системе (5.1), на границе $R = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_\mu = h [\alpha_{\mu 1} \cos b(t + t_0) + \alpha_{\mu 2} \sin b(t + t_0)] + \sum_k h_k \alpha_{\mu k} e^{\sigma_k t} + \\ + \sum_\nu h_\nu e^{m_\nu(t + t_0)} [\alpha_{\mu, 2\nu+1} \cos n_\nu(t + t_\nu) + \\ + \alpha_{\mu, 2\nu+2} \sin n_\nu(t + t_\nu)], \quad (\mu = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $h, h_\nu, h_k, t_0, t_\nu$ — произвольные постоянные.

Введем новые переменные:

$$s = t + t_0, \quad \eta_{2\nu-1} = h_\nu e^{m_\nu(t+t_\nu)} \cos n_\nu(t+t_\nu),$$

$$\eta_{2\nu} = h_\nu e^{m_\nu(t+t_\nu)} \sin n_\nu(t+t_\nu), \quad \eta_k = h_k e^{\alpha_k t},$$

связанные с x_μ соотношениями

$$x_\mu = h [\alpha_{\mu 1} \cos bs + \alpha_{\mu 2} \sin bs] + \sum_{\nu} \alpha_{\mu, 2\nu+1} \eta_{2\nu-1} +$$

$$+ \sum_{\nu} \alpha_{\mu, 2\nu+2} \eta_{2\nu} + \sum_k \alpha_{\mu k} \eta_{k-2}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, l; k = 2l+3, \dots, n).$$

Поступая совершенно аналогично тому, как в рассмотренных выше случаях системы двух, трех и четырех уравнений, приходим к следующему выражению для $L(\lambda_0)$:

$$L(\lambda_0) = \frac{1}{3!b\Delta_0} \left\{ \frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{\frac{2\pi}{b}} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ f'_{1s} & f'_{2s} & \dots & f'_{ns} \\ \alpha_{1s} & \alpha_{2s} & \dots & \alpha_{ns} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} ds \right\}_{h_0=0}, \quad (5.3)$$

где $\Delta_0 = \|\alpha_{j\mu}\|$, $P_j = P_j(f_1, f_2, \dots, f_n)$, а f_μ — уравнения кривой C_{h_0} :

$$f_\mu = h_0 [\alpha_{\mu 1} \cos bs + \alpha_{\mu 2} \sin bs].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. II изд. Москва, 1935.
2. Routh E. Treatise on the Stability of Given State of Motion, London, 1877.
3. Андронов А. А. и Понтрягин Л. С. Грубые системы. Доклады АН СССР, т. XIV, № 5, 1937.
4. Андронов А. А. и Леонтович Е. А. К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории. Доклады АН СССР, т. XXI, № 9, 1938.
5. Андронов А. А. Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.—Л. ОНТИ, 1937.
6. Laplace P. S. Mécanique céleste. Paris, 1799 — 1805.
7. Maxwell J. On the Governors Proceedings of the Royal Society, 16, 1868.
8. Thomson a. Tait. Treatise on Natural Philosophy, t. I Oxford, 1867.
9. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste Paris, 1892.
10. D'Alembert. Traite de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris, 1744.
11. Лагранж. Аналитическая механика. Русский перевод. ГИЗ, 1938.
12. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия. Известия Практического СПб технологического института, I, 1877.
13. Жуковский Н. Е. О прочности движения. Ученые записки Московского университета, вып. 4, 1922.
14. Stodola A. Ueber die Regulierung von Turbinen. I, II, Schweizerische Bauzeitung, т. 22, 1893 и т. 23, 1894.
15. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
16. Hurwitz A. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. Math. Ann., Bd. 45, 1895.
17. Nyquist H. Regeneration Theory Bell Sistem. Techn. Journ., 11, 1, 1932.
18. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Ленинград, ВВА, 1948.

19. Неймарк Ю. И. Структура D -разбиения пространства полиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста. Доклады АН СССР, т. IX, № 5, 1948.
20. Андронов А. А. и Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. Ученые Записки Горьк. гос. университета, № 6, 1939.
21. Леонтьев А. Ф. Рождение предельного цикла в трехмерном пространстве. Горьк. гос. университет, 1939 (студенческая работа).
22. Кузьмин П. А. Замечания о смене устойчивости установившегося движения. Сборник трудов Казанского авиационного института, № 10, 1939.
23. Баутин Н. Н. О рождении предельного цикла из состояния равновесия типа фокус. ЖЭТФ, вып. 6, 1938.
24. Баутин Н. Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл. Журн. Техн. физики, т. IX, вып. 7, 1939.
25. Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся из состояния равновесия типа фокус или центр. Доклады АН СССР, т. XIV, № 7, 1939.
26. Fuchs—Hopf—Seewald. Aerodynamik, Springer, Berlin, 1934.
27. Бутенин Н. В. Автоколебания стянду с автопилотом. Труды ЛВВАКА, т. 3, 1943.
28. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. Прикладная математика и механика, т. VII, вып. 2, 1943.
29. Андронов А. А. и Баутин Н. Н. Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности. Доклады АН СССР, т. XLVI, № 4, 1944.
30. Булгаков Б. В. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. Прикладная математика и механика, т. VI, № 4, 1942.
31. Tolle. M. Regelung der Kraftmaschinen, Berlin, 1921.
32. Бутенин Н. В. Механические автоколебательные системы. Прикладная математика и механика, т. VII, § 5, 1942.
33. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. Прикладная математика и механика, т. IX, № 3, 1945.
34. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М. — Л. ОНТИ, 1939.
35. Стрелков С. П. К теории автоколебаний под действием сил, зависящих от положения. Журнал Технической физики т. IX, вып. 17, 1939.

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
15	6 снизу	в фазовом пространстве	в пространстве параметров	Авт.
58	8 сверху	$x_1^{(h)} = \sigma_{1k} e^{x_k t}$	$x_1^{(k)} = \sigma_{1k} e^{x_k t}$	"
		$x_2 = \sigma_{2k} e^{x_k t}$	$x_2^{(k)} = \sigma_{2k} e^{x_k t}$	"
		$x_3 = \sigma_{3k} e^{x_k t}$	$x_3^{(k)} = \sigma_{3k} e^{x_k t}$	"
66	Формула (3. 22)	$R(\delta, s, h, \mu)$	$R(\delta, s, \eta, \mu)$	"
69	7 снизу	(3.14) и (3.30)	(3.8) и (3.18)	"
81	4 сверху	$x = \frac{V_1}{V_s} \sqrt{\frac{MS}{MS-RC}}$	$x = \frac{V_1}{V_s} \sqrt{\frac{MS}{MS-R_1C}}$	"
		$y = \frac{i_2 L_2 \omega_0}{V_s} \sqrt{\frac{MS}{MS-RC}}$	$y = \frac{i_2 L_2 \omega_0}{V_s} \sqrt{\frac{MS}{MS-R_1C}}$	"
92	16 снизу	$P(y_0) = S_1 \eta + S_2 \eta^2 + S_3 \eta^3$	$P(y_0) = S_1 \eta + S_2 \eta^2 + S_3 \eta^3$	"
117	Формула для α_{II}	$-b^2 \alpha^{(1)}$	$-b^2 \alpha_4^{(1)}$	Тип.
120	4 и 6 снизу	α_{4s}	α_{4l}	Авт.
122	5 "	$A_1^{(3)}$	$A_{11}^{(3)}$	Тип.
126	1 "	$A_{22}^{(1)} A_{24}^{(2)}$	$A_{22}^{(4)} A_{24}^{(2)}$	Корр.
163	21 "	céleste	céleste	Ред.

Цена 5 р. 50 к.

55

1918